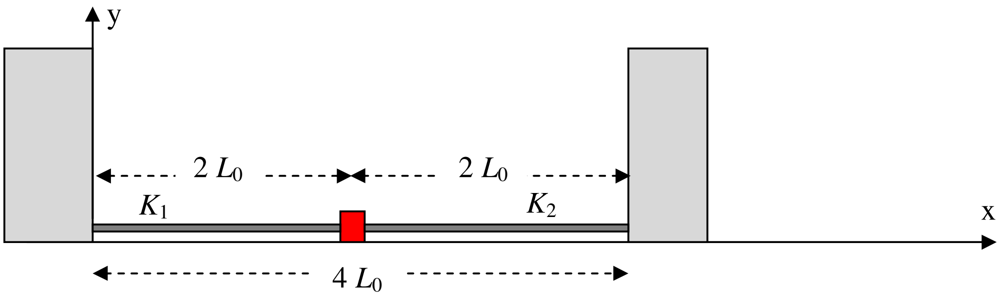
Compito di Fisica Generale di Ingegneria CIVILE-AMBIENTALE- EDILE, CIVILE-AMBIENTALE , e EDILE. 13 SETTEMBRE 2018

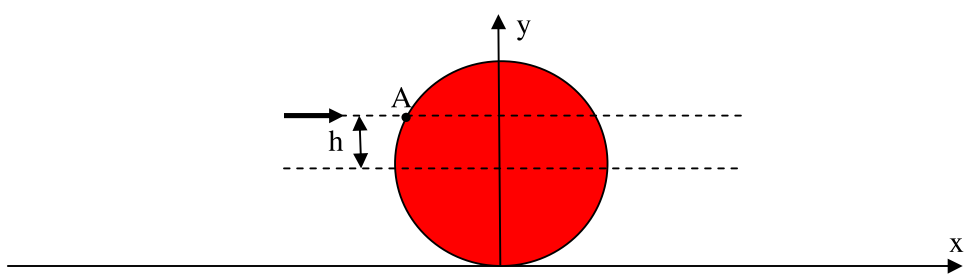
Esercizio 1 – Due molle di lunghezza a riposo L_0 = 3 cm e costanti elastiche rispettivamente uguali a $K_2 = K$ = 100 N/m e $K_1 = 2\ K$ sono collegate a due pareti verticali poste a distanza 4 L_0 l'una dall'altra come mostrato in figura e ad un corpo di dimensioni trascurabili e massa m = 3 kg. All'inizio il corpo viene mantenuto fermo nel punto di mezzo fra le pareti e, poi, al tempo t = 0 viene lasciato libero di muoversi. Per semplicità di disegno le molle sono rappresentate in figura con delle bacchette. Supponendo trascurabile ogni attrito,



1.1 – si calcoli la posizione di equilibrio x_{eq} della massa. (4 punti)

1.2 – Si mostri che la forza esercitata dalle molle è equivalente a quella di un'unica molla e si dica a quale istante di tempo t la massa passa per la prima volta nella posizione di equilibrio trovata al punto 1.1. (6 punti)

Esercizio 2 – Un <u>cilindro</u> di massa M = 5 kg e raggio r = 5 cm è appoggiato su un pavimento orizzontale liscio (senza attrito). Un proiettile di massa m = 30 g viene sparato orizzontalmente con velocità v_0 = 100 m/s e si conficca nel punto A ad altezza $h = r/2$ rispetto al centro del cilindro. L'urto è praticamente istantaneo e avviene al tempo t = 0. Per semplicità, <u>dopo l'urto</u>, lo studente può considerare trascurabile la massa del proiettile rispetto a quella del disco.

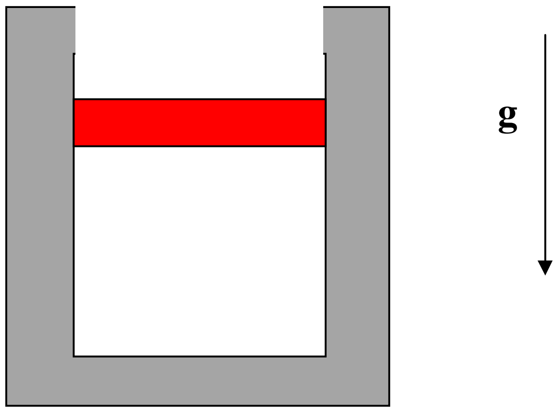


2.1 – Si trovi la velocità del centro del cilindro subito dopo l'urto e la velocità angolare del cilindro. (5 punti)

2.2 - Si dica, giustificando la risposta, se il moto del cilindro subito dopo l'urto è un moto di rotolamento puro. (2 punti)

2.3 – Si calcoli l'energia dissipata nell'urto. (3 punti)

Esercizio 3 – 0.01 moli di gas monoatomico si trovano all'interno di un cilindro adiabatico in cui scorre un pistone adiabatico di massa m = 5 kg e sezione $S = 10^{-2}$ m^2. Il sistema è interamente immerso in un gas esterno a pressione $p_0 = 3\ 10^3$ Pa ed è inizialmente in equilibrio avendo un volume $V_0 = 2\ 10^{-3}$ m^3.



3.1 – Si calcoli la temperatura del gas (2 punti).

Ad un dato istante, viene appoggiato sul pistone un corpo di massa m uguale a quella del pistone e si aspetta che il sistema raggiunga un nuovo equilibrio.

3.2 – si dica, motivando la risposta, se la trasformazione termodinamica è reversibile e si calcolino i nuovi valori del volume finale V_f e della temperatura finale T_f. (8 punti)

Si utilizzi per i calcoli il valore R = 8.316 J/ (mole K) della costante dei gas perfetti.

ATTENZIONE: LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE INDICANDO I PASSAGGI LOGICI ESSENZIALI UTILIZZATI PER ARRIVARE AL RISULTATO FINALE. RISPOSTE SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE, ANCHE SE CORRETTE, NON SARANNO PRESE IN CONSIDERAZIONE.

Soluzione Esercizio 1 - 1.1- Ciascuna molla esercita una forza sulla massa proporzionale al suo allungamento e diretta verso la rispettiva posizione di equilibrio. Se la massa si trova nella generica posizione x, l'allungamento della molla 1 risulta pari a $x - L_0$, mentre quello della molla 2 risulta pari a $(4\ L_0 - x) - L_0 = 3\ L_0 - x$. Tenendo conto che i versi delle forze devono essere verso le rispettive posizioni di riposo, le forze esercitate dalle molle lungo l'asse x risultano:

$$F_1 = -2\ K\ (x - L_0) \tag{1}$$

$$F_2 = K\ (3\ L_0 - x) \tag{2}$$

dove i rispettivi segni tengono conto del verso delle forze (con questi segni si verifica immediatamente che, come ci deve aspettare, nella posizione iniziale $x = 2\ L_0$, F_1 è negativa mentre F_2 è positiva essendo entrambe le molle allungate di una quantità pari a L_0). La forza totale agente sulla massa è pari a $F = F_1 + F_2$. Dunque

$$F = -2\ K\ x + 2\ K\ L_0 + 3\ K\ L_0 - K\ x = -3\ K\ x + 5\ KL_0 \tag{3}$$

L'espressione precedente può essere scritta nella forma equivalente

$$F = -3\ K\ (x - 5\ L_0/3) \tag{4}$$

Questa relazione ci dice che la forza totale esercitata dalle due molle è equivalente a quella di un'unica molla di costante elastica 3 K e lunghezza a riposo 5 L_0/3 con un estremo collegato alla parete sinistra e l'altro alla massa. La posizione di equilibrio è quella che annulla la forza in eq.(4) e, quindi, è proprio la posizione di riposo della molla equivalente cioè

$$x_{\mathrm{eq}} = 5\ L_0/3 = 5\ \mathrm{cm} = 0.05\ \mathrm{m} \tag{5}$$

1.2- Per quanto visto sopra è come se ci fosse una sola molla di costante elastica 3 K e lunghezza a riposo 5 L_0/3 con un estremo collegato alla parete sinistra e l'altro alla massa. Sappiamo, quindi che il moto della massa m è un moto di oscillazione armonica attorno alla posizione di equilibrio (eq.(5)) con pulsazione $\omega = (3\ K/m)^{1/2}$. Come abbiamo visto a lezione, nel caso particolare in cui le massa è inizialmente ferma come in questo caso, il corpo passa per la prima volta nella posizione di equilibrio dopo un tempo t pari ad un quarto del periodo di oscillazione $T = 2\ \pi/\omega$. Dunque:

$$t = T/4 = \pi\ (m/3K)^{1/2} / 2 = 0.157\ \mathrm{s} \tag{6}$$

Ricordiamo, per chi non l'avesse presente, come si ottiene il risultato $t = T/4$ per il moto armonico di una massa inizialmente ferma. La soluzione generale dell'equazione del moto è

$$x(t) = x_{\mathrm{eq}} + A \cos(\omega t + \phi) \tag{7}$$

dove A e ϕ sono due costanti arbitrarie il cui valore si ottiene imponendo le condizioni iniziali per la posizione x e per la velocità

$$v\ (t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\ \omega A \sin(\omega t + \phi). \tag{8}$$

Uguagliando i valori delle equazioni (7) e (8) all'istante iniziale $t = 0$ con i valori iniziali $x(0) = 2\ L_0$ e $v(0) = 0$ e tenendo conto che $x_{\mathrm{eq}} = 5\ L_0/3$, si ottengono le relazioni:

$$x(0) = 5\ L_0/3 + A \cos(\phi) = 2\ L_0 \quad \text{cioè} \quad A \cos(\phi) = L_0/3 \tag{9}$$

$v(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0$ cioè $\sin(\phi) = 0$ (10)

Il sistema (9) , (10) è risolto da $\phi = 0$ e $A = L_0/3$. Dunque, l'equazione oraria (7) diventa

$$x(t) = 5\, L_0/3 + L_0/3 \cos(\omega t) \qquad (11)$$

$x(t)$ di eq.(11) diventa uguale a 5 $L_0/3$ se $\cos(\omega t) = 0$. Il primo istante in cui $\cos(\omega t) = 0$ si ha quando $\omega t = \pi/2$, cioè:

$$t = \pi/(2\omega) = \pi\,(m/3K)^{1/2} / 2 \qquad (12)$$

Soluzione Es. 2 - 2.1 – Le forze esterne agenti sul cilindro sono la reazione normale $\boldsymbol{R}$ del pavimento e la forza peso totale $\boldsymbol{P}$ agente sui corpi. L'unica forza che può essere impulsiva è la reazione $\boldsymbol{R}$ che è diretta lungo l'asse verticale y. Dunque, nell'urto si conserva la componente orizzontale x della quantità di moto del sistema cilindro-proiettile. Inoltre, siccome il braccio di $\boldsymbol{R}$ rispetto al centro del cilindro è nullo, anche la componente z del momento angolare del sistema rispetto al centro si conserva. Siccome il moto di rotazione del cilindro successivo all'urto è evidentemente orario, ci conviene scegliere l'asse z entrante nel piano della figura. Le leggi di conservazione si scrivono:

$$m\, v_0 = M\, V + m\, v_x \approx M\, V \qquad (1)$$

$$m\, v_0\, r/2 = I_{tot}\, \omega = (M/2 + m)\, r^2\, \omega \approx M\, r^2\, \omega/2 \qquad (2)$$

dove V è la velocità del centro del cilindro subito dopo l'urto che ha solo componente x, v_x è la componente della velocità del proiettile lungo x subito dopo l'urto (il proiettile ha anche una componente y) e I_{tot} indica il momento di inerzia totale di proiettile-cilindro dopo l'urto. Gli ultimi membri a destra nelle relazioni (1) e (2) sono stati ottenuti trascurando m rispetto a M. Da queste relazioni si possono ottenere V e ω che sono pari a:

$$V = m\, v_0 / M = 0.6 \text{ m/s} \qquad (3)$$

$$\omega = m\, v_0 /(M\, r) = 12 \text{ rad/s} \qquad (4)$$

2.2 - perché il moto sia di rotolamento puro, il punto di contatto cilindro-pavimento deve essere istantaneamente fermo o, equivalentemente, il centro del cilindro si deve muovere con velocità $V = \omega r$, cioè deve valere l'uguaglianza $V/\omega = r$. Facendo il rapporto fra l'espressione di V in eq.(3) e quella di ω in eq.(4) si trova effettivamente

$$V/\omega = r \qquad (5)$$

e, quindi, il moto è di rotolamento puro.

2.3 – l'energia dissipata nell'urto è

$$E_{diss} = K_i - K_f \qquad (6)$$

dove K_i e K_f sono le energie cinetiche iniziali e finali. L'energia cinetica iniziale è solamente quella del proiettile pari a

$$K_i = m\, v_0^2/2 = 150 \text{ J} \tag{7}$$

Mentre alla fine, l'energia cinetica è quasi interamente dovuta al cilindro essendo la massa del proiettile trascurabile rispetto a quella del cilindro. Dunque, possiamo considerare solamente l'energia cinetica del cilindro che è

$$K_f = M\,V^2/2 + I_{tot}\,\omega^2/2 = M\,V^2/2 + M\,r^2\,\omega^2/4 = 1.35 \text{ J} \tag{8}$$

In totale l'energia dissipata è circa uguale all'intera energia iniziale ed è pari a

$$E_{diss} = K_i - K_f = 148.65 \text{ J} \tag{9}$$

Soluzione Es. 3 - 3.1 – In condizioni di equilibrio la forza totale sul pistone deve essere nulla e, quindi, la pressione del gas nello stato iniziale deve bilanciare la pressione esterna e quella dovuta al peso del pistone, dunque la pressione iniziale è:

$$p_i = p_0 + mg/S = 7.9\ 10^3 \text{ Pa} \tag{1}$$

Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene la temperatura iniziale:

$$T_i = p_i\,V_0/(\,n\,R) = 190 \text{ K} \tag{2}$$

3.2 – La trasformazione <u>non è reversibile</u> perché avviene in modo rapido e il sistema non passa attraverso stati di equilibrio.
Poiché il sistema è adiabatico, il calore Q assorbito dal gas è nullo e il lavoro esterno fatto dalla pressione esterna e dalla gravità deve uguagliare la variazione di energia interna del gas. La forza di gravità è, ora, 2 m $\mathbf{g}$ e il lavoro esterno fatto da pressione esterna e forza peso è $L_{est} = -\,(p_0 + 2mg/S)\,(V_f - V_i)$ (il segno – indica che il lavoro esterno è negativo se il gas si espande e il pistone sale). Dunque, per il I Principio della Termodinamica si ottiene

$$-\,(p_0 + 2mg/S)\,(V_f - V_i) = 3\,(p_f\,V_f - p_i\,V_i)/2 \tag{3}$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione $\Delta U = 3\ n\ R\ (T_f - T_i)/2 = 3\ (p_f\ V_f - p_i\ V_i)/2$ e dove p_f è la pressione finale che deve bilanciare la pressione esterna e la nuova forza peso ed è, quindi, pari a:

$$p_f = p_0 + 2\,mg/S = 12.8\ 10^3 \text{ Pa} \tag{4}$$

Nell'equazione (3) l'unica incognita è il volume finale V_f. Sostituendo nella (3) a p_f l'espressione (4), a p_i la (1) e a V_i il valore iniziale V_0 e svolgendo semplici calcoli algebrici si deduce:

$$V_f = \frac{5\,p_0 + 7mg/S}{5\,p_0 + 10mg/S} V_0 = 1.54\ 10^{-3} \text{ m}^3 \tag{5}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si deduce, perciò:

$$T_f = p_f\,V_f\,/(\,n\,R) = 237 \text{ K} \tag{6}$$