CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2018/2019 – Prova Scritta 05/04/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j; \\ \beta \text{ se } i = 1, j = n; \\ \alpha \text{ se } i = n, j = 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini il massimo $s > 0$ tale che A è invertibile $\forall \alpha, \beta$ con $|\alpha| < s$ e $|\beta| < s$.
2. Si determini per quali valori di α e β la matrice A ammette fattorizzazione LU.
3. Per tali valori si determini la fattorizzazione LU.
4. Si determini per quali valori di α e β la matrice risulta singolare.
5. Si scriva una function MatLab che dati in input α, β e $\boldsymbol{b}$ implementa un metodo a costo lineare in termini di operazioni aritmetiche ed occupazione di memoria per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Per $n = 512$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, $\boldsymbol{b} = \texttt{ones}(n, 1)$ si riporti il valore di $err = \| \boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}} \|_\infty / \| \widehat{\boldsymbol{x}} \|_\infty$ dove $\boldsymbol{x}$ è il vettore restituito dal programma e $\widehat{\boldsymbol{x}}$ è la soluzione del sistema lineare calcolata usando l'operatore "backslash" di Matlab.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione

$$f(x) = xe^x - a = 0, \quad a > 0.$$

1. Si mostri che l'equazione ammette una ed una sola soluzione indicata con $\xi(a)$.
2. Si mostri che il metodo delle tangenti applicato per la risoluzione dell'equazione genera successioni convergenti a $\xi(a)$ per ogni punto iniziale $x_0 \geq 0$.
3. Scrivere una funzione Matlab che dato in input a e tol restituisce l'approssimazione di $\xi(a)$ generata dal metodo delle tangenti applicato per la risoluzione dell'equazione con punto iniziale nullo e condizione di arresto $|x_k - x_{k-1}|/|x_k| \leq tol$. Per $a \in \{0.5, 1, 1.5\}$ e $tol = 1.0e - 12$ riportare le approssimazioni di $\xi(a)$ restituite dal metodo.
4. Utilizzando la funzione di cui al punto precedente ed il comando `plot` tracciare un grafico della funzione $\xi(a)$ per $a \in [0, 5]$.