

CALCOLO NUMERICO
 Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
 A.A. 2018/2019 – Prova Scritta 16/07/2019

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

Esercizio 1 Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos(x) - 1$.

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione α e se ne dia un intervallo di separazione.
2. Si mostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x) + 1$, $k \geq 0$, genera successioni convergenti ad α per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Si scriva una function MatLab che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-12}$. La funzione deve restituire la coppia x_k, k . Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi/2$.

Esercizio 2 Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 1, j = n \text{ o } i = n, j = 1; \\ \alpha + 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini i valori del parametro α per cui A risulta predominante diagonale.
2. Si determini i valori del parametro α per cui il metodo di Jacobi applicato ad A risulta convergente.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ calcola la successione generata dal metodo di Jacobi con vettore iniziale nullo applicato per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ arrestandosi quando $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_\infty \leq 1.0e - 6$ o $k > itmax$ e restituendo in uscita la coppia \mathbf{x}_k, k . Per $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(100, 1)$, $itmax = 100$ e $\alpha = 2$ riportare il valore di k restituito dal programma.