

# Richiami di termodinamica

# Principi e trasformazioni

- Principi della termodinamica
- Proprietà dei fluidi
- Trasformazioni dei fluidi
- Cicli di riferimento

# Primo principio della termodinamica

- Esperienza di Joule: conversione del lavoro in calore

$$\Delta U = Q + \bar{L}$$

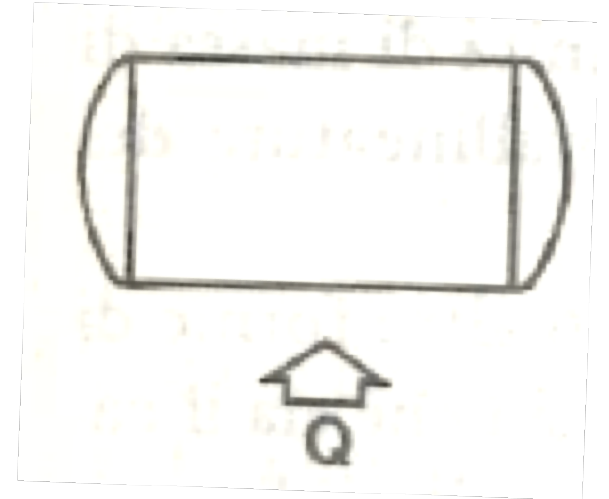
- Dove Q e L sono positivi verso il sistema
- Calore e Lavoro arricchiscono il contenuto energetico del fluido, ovvero la sua energia interna

# Applicazioni del primo principio

- In un recipiente indeformabile (nessuno scambio di lavoro è possibile) si ha:

$$Q = \Delta U$$

- La trasformazione è visibile attraverso un aumento della pressione e della temperatura del fluido nel recipiente.
- La trasformazione è isocora (a volume costante)

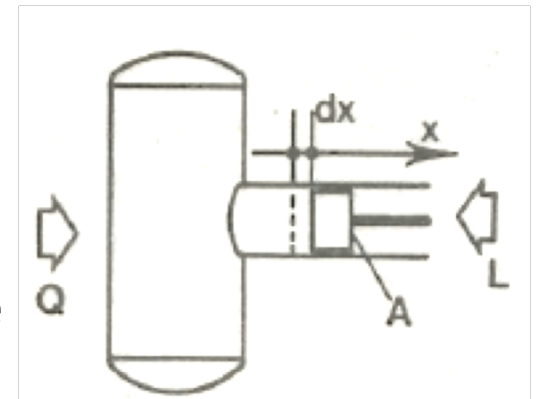


# Applicazioni del primo principio

- Se una parete del recipiente è mobile (ad esempio un pistone che si muove linearmente) e se non ci sono scambi di calore:

$$\bar{L} = \Delta U$$

- Se il pistone comprime il fluido aumentano la sua temperatura e pressione, nel caso contrario diminuiscono
- La trasformazione è adiabatica



# Applicazioni del primo principio

- Se esprimiamo il lavoro meccanico del pistone, possiamo scrivere:

$$d\bar{L} = -Fdx = -pAdx = -pdV$$

- Per conoscere il lavoro dobbiamo integrare l'espressione suddetta ma dobbiamo conoscere la legge che lega pressione e volume
- E il lavoro dipende dal tipo di trasformazione che utilizziamo

# Lavoro adiabatico

- Dato che

$$\rho = \frac{1}{V} \Rightarrow \ln \rho = -\ln V \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \Rightarrow dV = -V \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\rho}{\rho^2}$$

- Quindi

$$d\bar{L} = -pdV = p \frac{d\rho}{\rho^2} = dU$$

- In una trasformazione di compressione la densità aumenta e quindi il lavoro è positivo. Viceversa in espansione

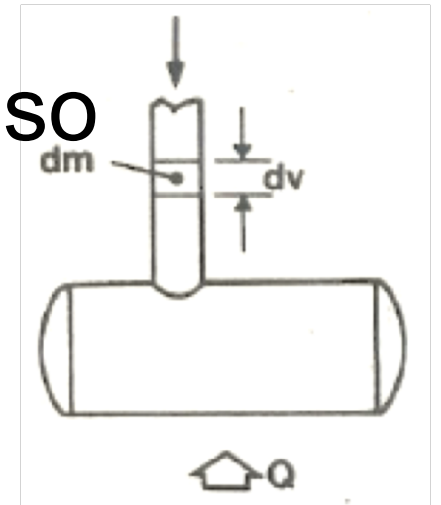
# Sistema con massa variabile

- Se nel recipiente viene introdotta una massa  $dm = \rho dV$  e se il processo è comunque adiabatico, la variazione di energia interna consiste nell'energia interna introdotta con la massa e dal lavoro di introduzione della massa:

$$dU^* = dm * U(m) + p dV = dm \left[ U(m) + \frac{p dV}{dm} \right] = dm \left[ U(m) + \frac{p}{\rho} \right]$$

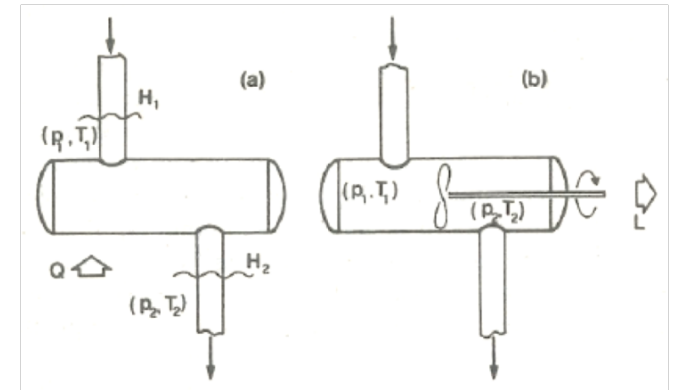
- Dalla definizione di entalpia:  $H = U + p * v$

$$dU^* = dm * H(m)$$





# Sistema aperto



- In un sistema con introduzione ed estrazione continua di massa possiamo scrivere:

$$dU^* = dm_1 H_1 - dm_2 H_2 + dQ^* + dL^*$$

- Se il sistema è in regime stazionario, ovvero le variabili sono costanti nel tempo:

$$dU^* = 0 \Rightarrow H_2 - H_1 = Q + L$$

- Che è una delle espressioni del primo principio della termodinamica

# Sistemi aperti

- Per i sistemi aperti l' entalpia sostituisce l' energia interna nel primo principio della termodinamica

$$dH = dQ + dL$$

- Dall' esame delle due espressioni del primo principio potrebbe sembrare che:

$$dU = dQ + d\bar{L} \quad e \quad dH = dQ + dL \quad \Rightarrow \quad dU = dH$$

- Ma in realtà  $dH=dU$  solo se  $d(pv)=0$

# Sistemi aperti

- Ma questa condizione si ha solo nel caso delle trasformazioni isoterme:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

- Invece se supponiamo una trasformazione adiabatica:

$$dL = dH = dU - p \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\rho}$$

- Quindi dalle seguenti:

$$dU = d\bar{L} = p \frac{d\rho}{\rho^2} \quad ; \quad d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{dp}{\rho} - p \frac{d\rho}{\rho^2} \quad ; \quad dL = \frac{dp}{\rho}$$

- **Risulta:**  $dL = d\bar{L} + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow L = \bar{L} + \Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) = \bar{L} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}$

# Generalizzazione del I principio

- Se in sistema abbiamo anche variazioni di energia potenziale e cinetica queste si sommano alle variazioni di energia interna.

- In un sistema chiuso:

$$\Delta U + \Delta E_p + \Delta E_c = Q + \bar{L}$$

- In un sistema aperto:

$$\Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c = Q + L$$

# Espressioni particolari

- Nel caso di trasformazioni adiabatiche:

$$\Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c = L$$

- Se poi consideriamo un liquido in cui non abbiamo variazioni significative di energia interna:

$$L = \Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c = \Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) + g\Delta h + \frac{\Delta c^2}{2}$$

- Per un aeriforme invece non abbiamo variazioni importanti di energia potenziale:

$$\Delta H + \Delta E_c = Q + L \Rightarrow dH + cdc = dQ + dL \Rightarrow dH_t = dQ + dL$$

# Trasformazioni reversibili e irreversibili

- Un processo è reversibile quando può essere percorso nei due sensi riguadagnando le condizioni iniziali di partenza
- Tipici fenomeni di irreversibilità:
  - Attrito
  - Scambio termico con differenza finita di temperatura
  - Reazioni chimiche

# Entropia

- Ogni trasformazione di lavoro è in realtà irreversibile e possiamo scrivere:

$$d\bar{L} = p \frac{d\rho}{\rho^2} + dL_p$$

- Quindi possiamo scrivere il I principio:

$$dU = dQ + p \frac{d\rho}{\rho^2} + dL_p \quad \Rightarrow \quad dQ + dL_p = dU - p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

- I due membri della equazione sopra non sono differenziali esatti, ma se li dividiamo per T lo diventano:

$$\frac{dQ + dL_p}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{p}{T} \frac{d\rho}{\rho^2}$$

# Entropia

- Chiamiamo il primo membro della equazione precedente entropia, la indichiamo con  $S$  e possiamo scrivere nelle seguenti forme:

$$dU = TdS + p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$dH = TdS + \frac{dp}{\rho}$$

- L' entropia non può mai diminuire nei processi adiabatici:  $dS = \frac{dQ}{T} + \frac{dL_p}{T}$



# Proprietà dei fluidi

- Stati fisici dei fluidi
  - Gas e vapore
  - Liquido
- Equazioni di stato
  - Gas perfetti
  - Gas reali e vapore
  - Liquidi
- Equazioni calorimetriche

# Proprietà dei fluidi

- Gas perfetti
  - Non vi sono interazioni fisiche tra le molecole del gas
  - Il gas può essere schematizzato come ideale se
    - urti perfettamente elastici tra le molecole
    - non può essere liquefatto ( $T > T_{\text{critica}}$ )
    - calore specifico costante
    - assenza di viscosità

# Proprietà dei fluidi

- Equazione di stato dei gas perfetti

$$p\tilde{V} = \tilde{R}T$$

$p$  = pressione [Pa]

$\tilde{V}$  = volume molare [ $\text{m}^3/\text{kmol}$ ]

$$R = \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}}$$

$\tilde{R}$  = costante universale dei gas perfetti 8.314 [ $\text{kJ}/\text{kmol K}$ ]

$\tilde{M}$  = peso molecolare [ $\text{kg}/\text{kmol}$ ]

$$pv = RT$$

$v$  = volume specifico [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]

$R$  = costante del gas [ $\text{kJ}/\text{kg K}$ ]

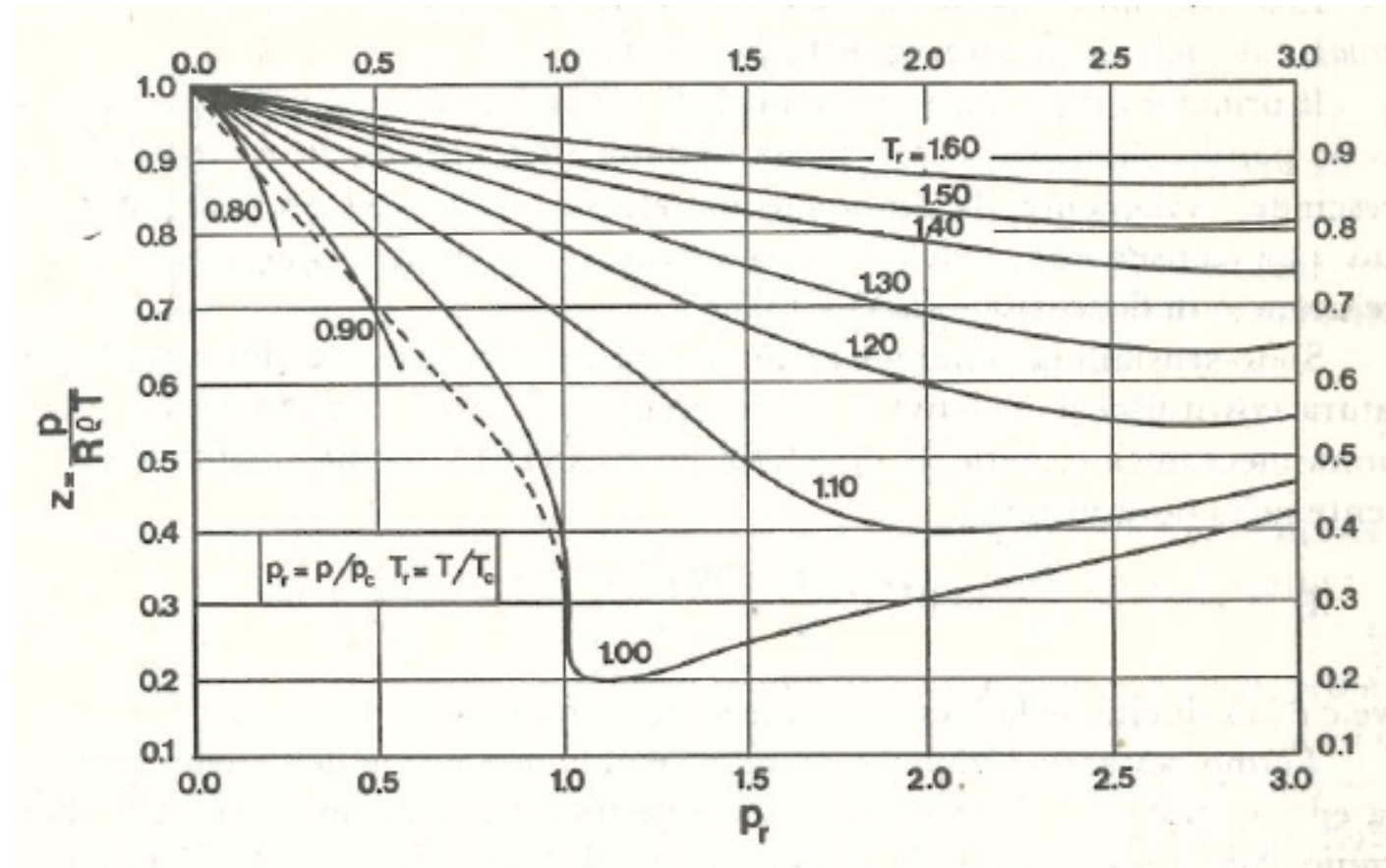
$$p = \rho RT$$

$T$  = temperatura [K]

# Gas reali

- Per i gas reali possiamo utilizzare come equazione di stato la seguente:

$$Z = \frac{pv}{RT}$$



# Proprietà dei fluidi

- I gas perfetti hanno il calore specifico funzione della sola temperatura

$$dQ = TdS = dU - pdv \quad (1)$$

- Se esprimiamo  $S$  e  $U$  in funzione di  $v$  e  $T$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial v} dv \quad (2)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial v} dv \quad (3)$$

- Inserendo la (3) nella (1)

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{p}{T} dv = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) \frac{dT}{T} + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right) \frac{dv}{T} - \frac{p}{T} dv \quad (4)$$

# Proprietà dei fluidi

- Confrontando la (2) e la (4) e differenziando rispetto a  $v$  e a  $T$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial v} \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = \left[ \frac{\partial U}{\partial v} - p \right] \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial T} = \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \right] \frac{1}{T} - \left[ \frac{\partial U}{\partial v} - p \right] \frac{1}{T^2}$$

- quindi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial v} \frac{1}{T} = \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \right] \frac{1}{T} - \left[ \frac{\partial U}{\partial v} - p \right] \frac{1}{T^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \left[ p - \frac{\partial U}{\partial v} \right] \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial T} = 1 - \frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v} = \alpha_v$$

# Proprietà dei fluidi

- Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti

$$\alpha_v = \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{v}{R} \frac{R}{v} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

- Quindi l'energia interna per valori finiti di pressione è indipendente dal volume specifico e quindi è funzione della sola temperatura.
- Si può dimostrare lo stesso per l'entalpia.

# Proprietà dei fluidi

- Grandezze calorimetriche: calore specifico

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

- Calore specifico a pressione costante

$$c_p = \frac{dH}{dT}$$

- Calore specifico a volume costante

$$c_v = \frac{dU}{dT}$$



# Proprietà dei fluidi

- Dalla definizione di entalpia

$$H = U + pv \Rightarrow dH = dU + d(pv) \Rightarrow$$

$$dH - dU = (c_p - c_v)dT = d(pv) = RdT$$

- Quindi per un gas perfetto

$$c_p - c_v = R$$

- I gas monoatomici hanno  $c_p$  costante
- I gas poliatomici hanno espressioni di  $c_p$  e  $c_v$  in funzione della temperatura (funzioni di Langen)

$$c_p = a + bT + cT^2$$

$$c_v = a' + b'T + c'T^2$$

# Proprietà dei fluidi

- Cambiamenti di fase: transizione di una sostanza tra una fase e l'altra
- Vale la regola di Gibbs-Helmoltz
$$v = N - x + 2$$
  - $v$  numero delle informazioni necessarie per definire il sistema
  - $N$  numero dei componenti
  - $x$  numero delle fasi
- Il punto in cui coesistono le tre fasi solida, liquida e gassosa si chiama punto triplo
- Il punto sopra al quale non può esistere la fase liquida si chiama punto critico

# Grandezze Termodinamiche

- Nei calcoli che dobbiamo eseguire è necessario conoscere alcune grandezze termodinamiche:
  - $h$ : entalpia
  - $s$ : entropia
  - $u$ : energia interna
- Poiché non è possibile avere una misura diretta delle grandezze suddette, è possibile calcolarle indirettamente conoscendo alcune grandezze fisiche e termodinamiche misurabili:
  - Pressione, volume, temperatura
  - Calore specifico

# Grandezze Termodinamiche

- Per i gas possiamo utilizzare facilmente l'equazione di stato dei gas perfetti e le espressioni del calore specifico in funzione della temperatura
- Per i liquidi e per i gas lontani dalle condizioni ideali ci sono tre metodi:
  - Integrazione dell'equazione di stato e delle espressioni dell'entalpia, entropia e energia interna
  - Tabelle termodinamiche
  - Diagrammi termodinamici





(temp. Sat. °C)		50	100	150	200	250	300	350	400	500	600	700	800
50.00 (263.9)	v	0.00101	0.001041	0.001088	0.001153	0.001249	0.045 301	0.051 941	0.057 791	0.068 494	0.078 616	0.088 446	0.098 093
	h	213.55	422.74	634.96	853.79	1085.76	29255	3071.2	3198.3	3433.7	3664.5	3897.9	4135.3
	s	0.70119	1.30304	1.83663	2.32525	2.791	6.2105	6.4545	6.6508	6.9770	7.2578	7.5108	7.7431
60.00 (275.6)	v	0.001009	0.001041	0.001087	0.001152	0.001248	0.036 145	0.042 222	0.047 379	0.056 592	0.065 184	0.073 478	0.081 587
	h	214.41	423.49	635.58	854.21	1085.75	2885.0	3045.8	3180.1	3422.2	3656.2	3891.7	4130.7
	s	0.70072	1.30227	1.83554	2.3237	2.78859	6.0692	6.3386	6.5462	6.8818	7.1664	7.4217	7.6550
70.00 (285.8)	v	0.001009	0.00104	0.001086	0.001151	0.001246	0.029 457	0.035 233	0.039 922	0.048 086	0.055 590	0.062 787	0.069 798
	h	215.26	424.25	636.21	854.63	1085.75	2839.4	3018.7	3161.2	3410.6	3647.9	3885.4	4126.0
	s	0.70026	1.30149	1.83445	2.32217	2.78621	5.9327	6.2333	6.4536	6.7993	7.0880	7.3456	7.5808
80.00 (295.0)	v	0.001009	0.00104	0.001086	0.00115	0.001244	0.024 264	0.029 948	0.034 310	0.041 704	0.048 394	0.054 770	0.060 956
	h	216.12	425	636.84	855.06	1085.77	2786.8	2989.9	3141.6	3398.8	3639.5	3879.2	4121.5
	s	0.69979	1.30072	1.83337	2.32064	2.78386	5.7942	6.1349	6.3694	6.7262	7.0191	7.2790	7.5158
90.00 (303.3)	v	0.001008	0.001039	0.001085	0.001149	0.001245	0.001402	0.025 792	0.029 29	0.036 737	0.042 798	0.048 534	0.054 080
	h	216.98	425.75	637.47	855.49	1085.79	1344.55	2959.0	3121.2	3386.8	3631.1	3873.0	4116.7
	s	0.69933	1.29995	1.83229	2.31912	2.78153	3.25329	6.0408	6.2915	6.6600	6.9574	7.2196	7.4579
100.00 (311.0)	v	0.001008	0.001039	0.001084	0.001148	0.001241	0.001398	0.022 421	0.026 408	0.032 760	0.038 320	0.043 546	0.048 580
	h	217.84	426.5	638.1	855.92	1085.83	1343.36	2925.8	3099.9	3374.6	3622.7	3866.8	4112.0
	s	0.69887	1.29919	1.83121	2.31761	2.77923	3.24878	5.9489	6.2182	6.5994	6.9013	7.1660	7.4058
125.00 (327.8)	v	0.001007	0.001037	0.001083	0.001146	0.001236	0.001388	0.016 122	0.020 010	0.025 590	0.030 259	0.034 510	0.038 682
	h	219.99	428.39	639.67	857.02	1085.96	1340.65	2828.0	3042.9	3343.3	3601.4	3851.1	4100.3
	s	0.69771	1.29728	1.82854	2.31387	2.77357	3.23797	5.7155	6.0481	6.4654	6.7796	7.0504	7.2942
150.00 (342.1)	v	0.001006	0.001036	0.001081	0.001143	0.001232	0.001378	0.011 462	0.015 661	0.020 795	0.024 884	0.028 587	0.032 086
	h	222.13	430.27	641.26	858.14	1086.16	1338.25	2694.8	2979.1	3310.6	3579.8	3835.4	4088.6
	s	0.69656	1.29638	1.8259	2.31018	2.76804	3.22776	5.4467	5.8876	6.3487	6.6764	6.9536	7.2013
175.00 (354.6)	v	0.001005	0.001036	0.00108	0.001141	0.001229	0.001369	0.001716	0.012 460	0.017 359	0.021 043	0.024 314	0.027 376
	h	224.27	432.16	642.85	859.27	1096.41	1336.14	1663.62	2906.3	3276.5	3557.8	3819.7	4077.0
	s	0.69541	1.29351	1.82328	2.30655	2.76265	3.21808	3.764	5.7274	6.2432	6.5858	6.8698	7.1215
200.00 (365.7)	v	0.001003	0.001034	0.001078	0.001139	0.001225	0.001361	0.001666	0.009 947 0	0.014 771	0.018 161	0.021 111	0.023 845
	h	226.41	434.05	644.45	860.43	1086.72	1334.26	1647.18	2820.5	3241.1	3535.5	3803.8	4065.3
	s	0.69427	1.29614	1.82068	2.30296	2.75737	3.20885	3.73084	5.5585	6.1456	6.5043	6.7953	7.0511
300.00	v	0.000999	0.001029	0.001072	0.00113	0.001211	0.001322	0.001554	0.002 830 6	0.008 680 8	0.011 436	0.013 647	0.015 619
	h	234.95	441.62	650.9	865.2	1088.42	1328.69	1610.04	2161.8	3085.0	3443.0	3739.7	4018.5
	s	0.68971	1.2843	1.81053	2.28907	2.73735	3.17565	3.64552	4.4896	5.7972	6.2340	6.5560	6.8288
400.00	v	0.000995	0.001024	0.001066	0.001122	0.001198	0.001308	0.00149	0.001 909 1	0.005 615 6	0.008 088 4	0.009 930 2	0.011 521
	h	243.46	449.22	657.44	870.2	1090.76	1325.39	1589.69	1934.1	2906.8	3346.4	3674.8	3971.7
	s	0.68519	1.27714	1.80072	2.27584	2.71879	3.14688	3.58848	4.1190	5.4762	6.0135	6.3701	6.6606
500.00	v	0.000991	0.00102	0.001061	0.001114	0.001187	0.001287	0.001444	0.001 729 1	0.003 882 2	0.006 111 3	0.007 719 7	0.009 075 9
	h	251.94	456.83	664.06	865.4	1093.61	1323.69	1576.39	1877.7	2723.0	3248.3	3610.2	3925.3
	s	0.68069	1.27014	1.79123	2.26319	2.70145	3.12127	3.54361	4.0083	5.1782	5.8207	6.2138	6.5222
600.00	v	0.000988	0.001016	0.001055	0.001107	0.001176	0.00127	0.001408	0.001 632 4	0.002 915 5	0.004 835 0	0.006 269 0	0.007 460 3
	h	260.39	464.46	670.74	880.76	1096.88	1323.17	1567.15	1847.3	2570.6	3151.6	3547.0	3879.6
	s	0.67622	1.26331	1.78203	2.25105	2.68513	3.09806	3.5059	3.9383	4.9374	5.6477	6.0775	6.4031
700.00	v	0.000984	0.001012	0.00105	0.001101	0.001166	0.001254	0.001379	0.001 567 1	0.002 466 8	0.003 971 9	0.005 256 6	0.006 320 8
	h	268.81	472.1	677.48	886.27	1100.51	1323.57	1560.58	1827.8	2467.1	3060.4	3486.3	3835.3
	s	0.67177	1.25662	1.76308	2.23937	2.66967	3.07674	3.473	3.8855	4.7688	5.4931	5.9562	6.2979
800.00	v	0.000980	0.001008	0.001045	0.001094	0.001157	0.00124	0.001355	0.001 518 0	0.002 188 1	0.003 379 2	0.004 519 3	0.005480 5
	h	277.2	479.75	684.28	891.92	1104.43	1324.7	1555.92	1814.2	2397.4	2980.3	3428.7	3792.8
	s	0.66733	1.25006	1.76438	2.22811	2.65497	3.05696	3.4436	3.8425	4.6488	5.3595	5.8470	6.2034
900.00	v	0.000977	0.001004	0.001041	0.001088	0.001149	0.001227	0.001334	0.001 478 8	0.002 012 9	0.002 966 8	0.003 964 2	0.004 840 7
	h	285.55	487.4	691.12	897.87	1108.62	1326.43	1552.7	1804.6	2349.9	2913.5	3374.6	3752.4
	s	0.6629	1.24363	1.75591	2.21721	2.64093	3.03845	3.41686	3.8059	4.5602	5.2468	5.7479	6.1179
1000.00	v	0.000973	0.001	0.001036	0.001082	0.001141	0.001216	0.001315	0.001 446 4	0.001 893 4	0.002 668 1	0.003 535 6	0.004 341 1
	h	293.87	495.07	698	903.53	1113.02	1328.65	1550.6	1797.6	2316.1	2857.5	3324.4	3714.3
	s	0.65848	1.23732	1.74764	2.20666	2.62748	3.02102	3.39225	3.7738	4.4913	5.1505	5.6579	6.0397

# Proprietà dell'acqua e del vapore surriscaldato

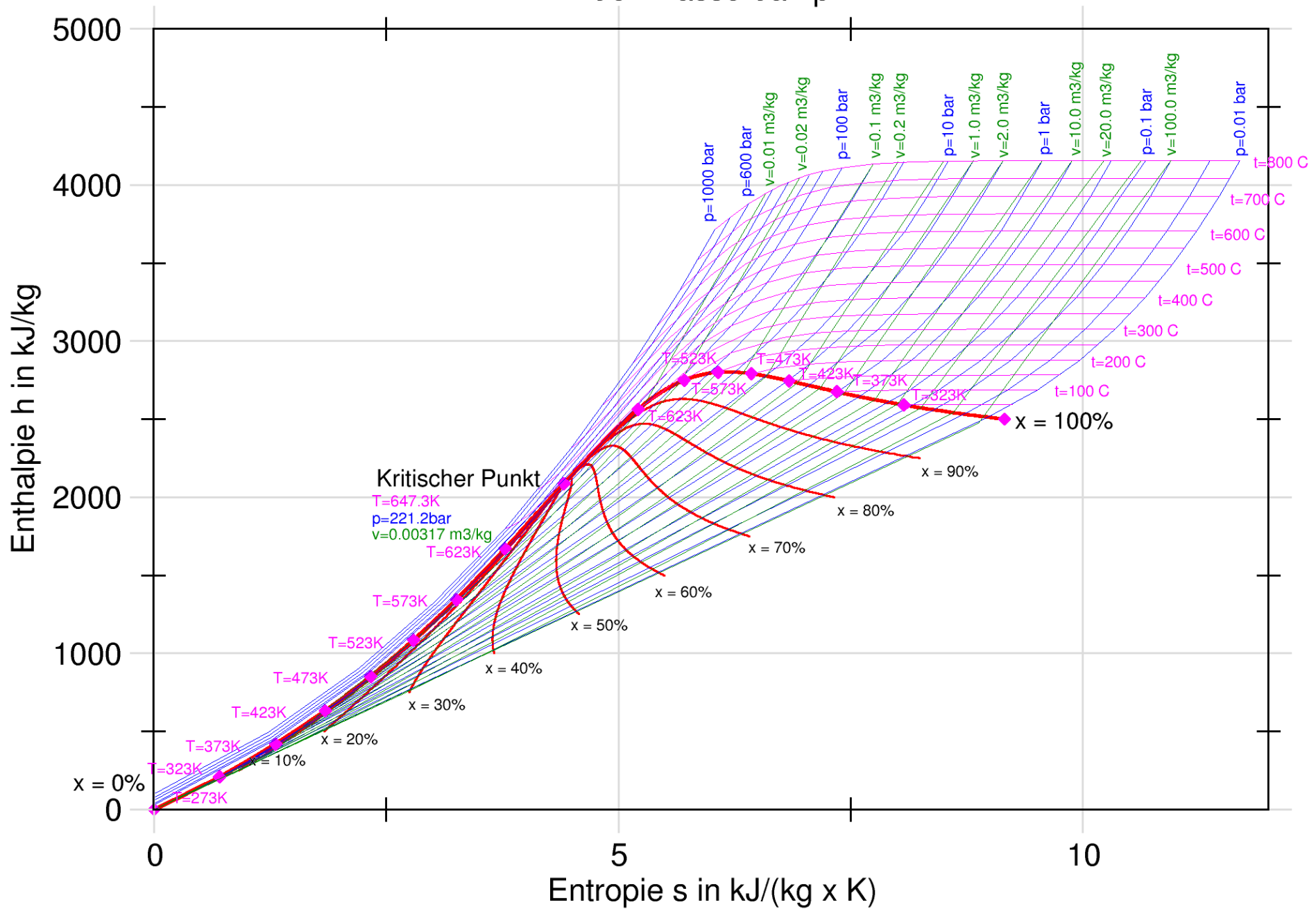
# Diagrammi termodinamici

- h-s: da indicazioni sulle trasformazioni in cui si scambia calore e si compie lavoro con una visualizzazione immediata
- T-s: permette una visualizzazione dei cicli termodinamici e il calcolo indiretto del calore scambiato
- p-v: evidenzia le trasformazioni in cui si compie lavoro

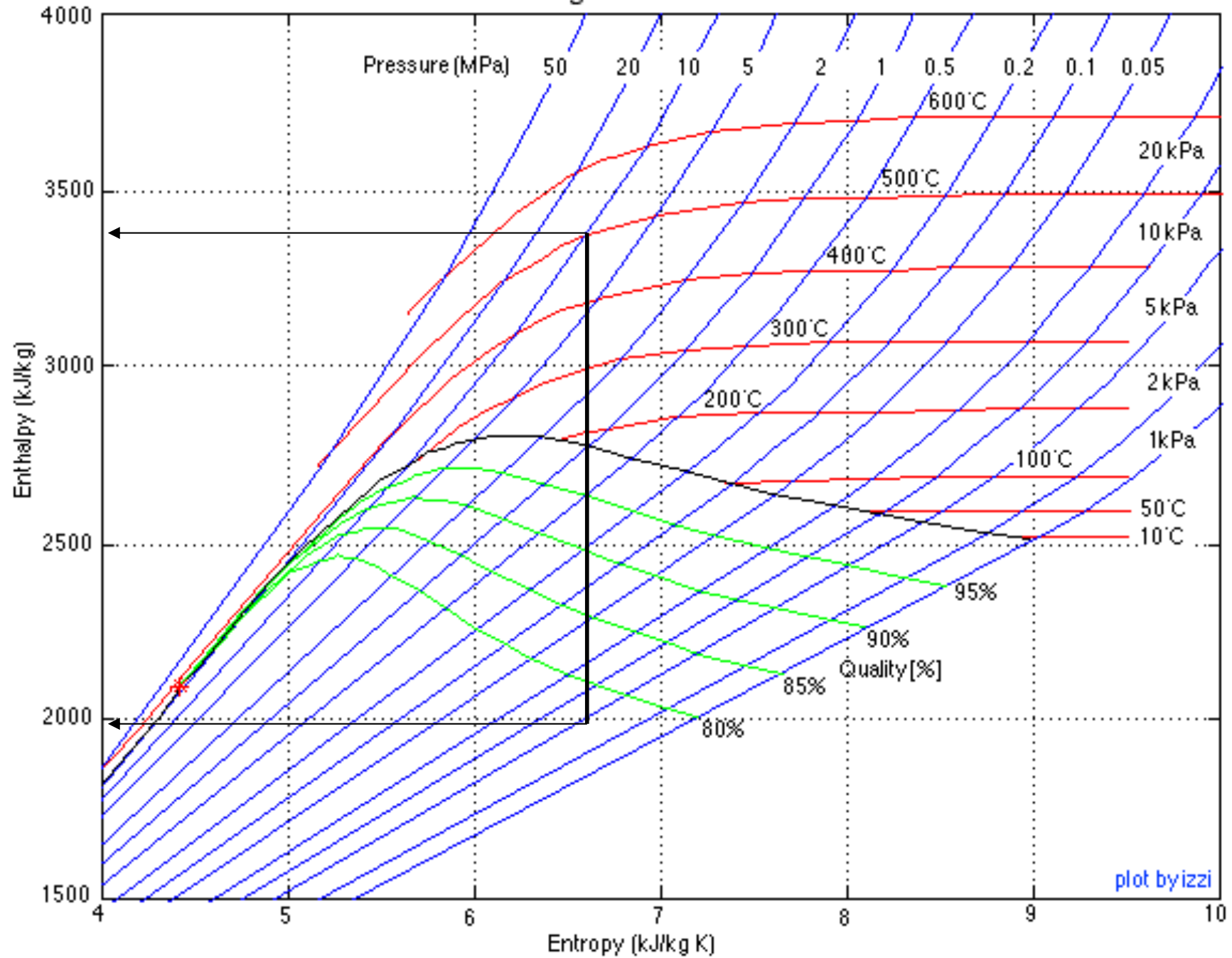


# Mollier-h, s Diagramm

fuer Wasserdampf



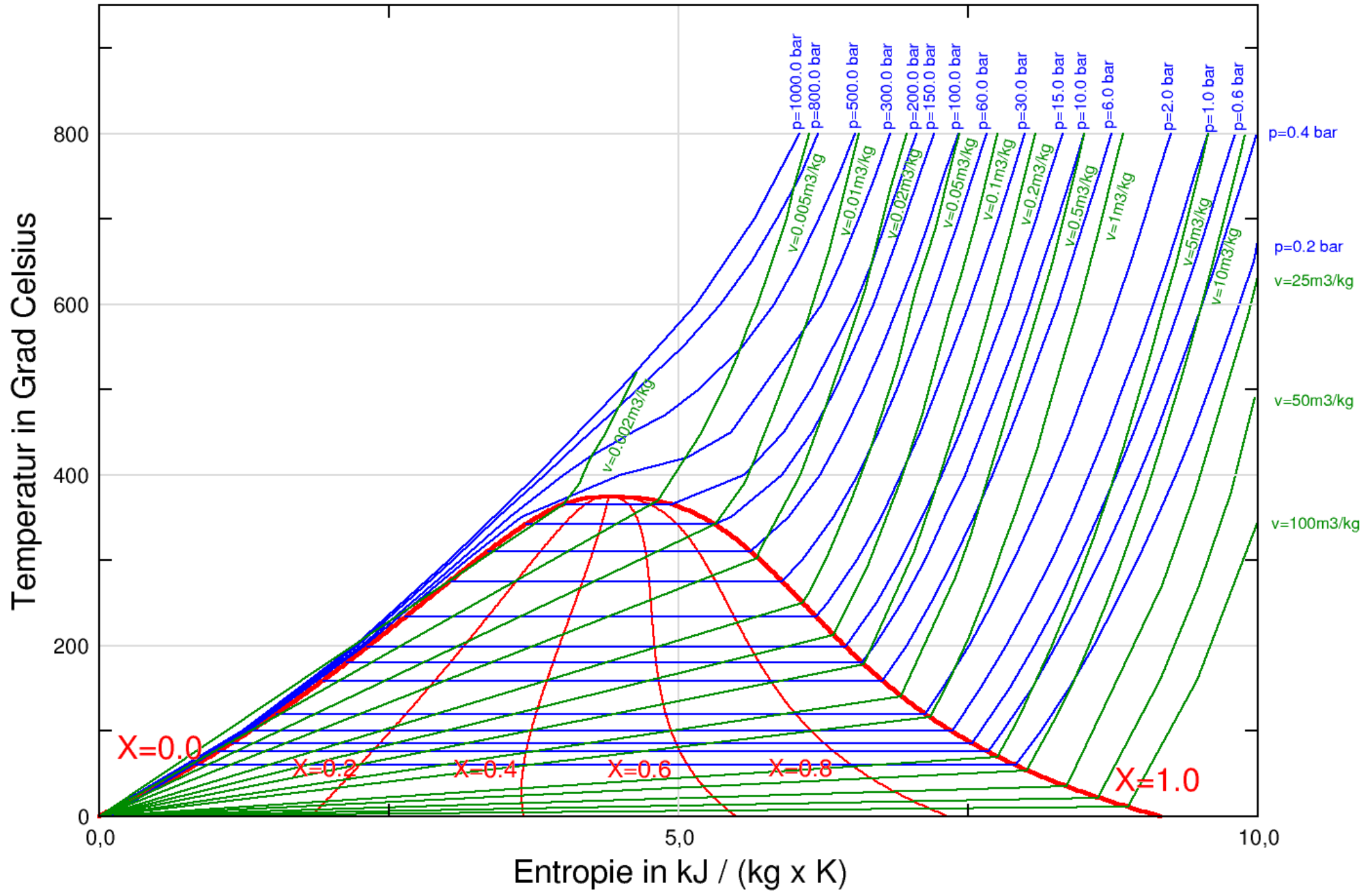
*h-s* diagram for water



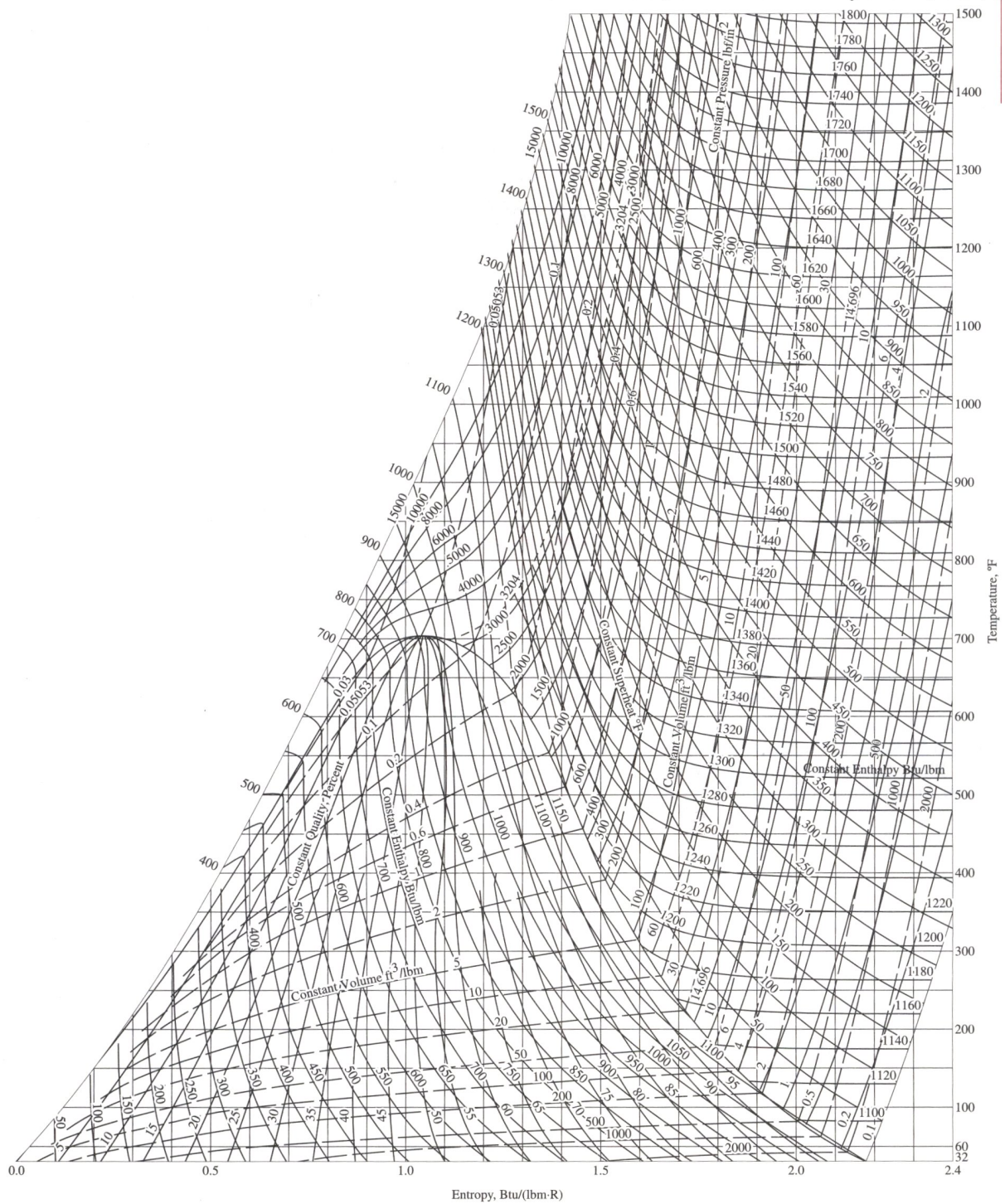
plot byizzi

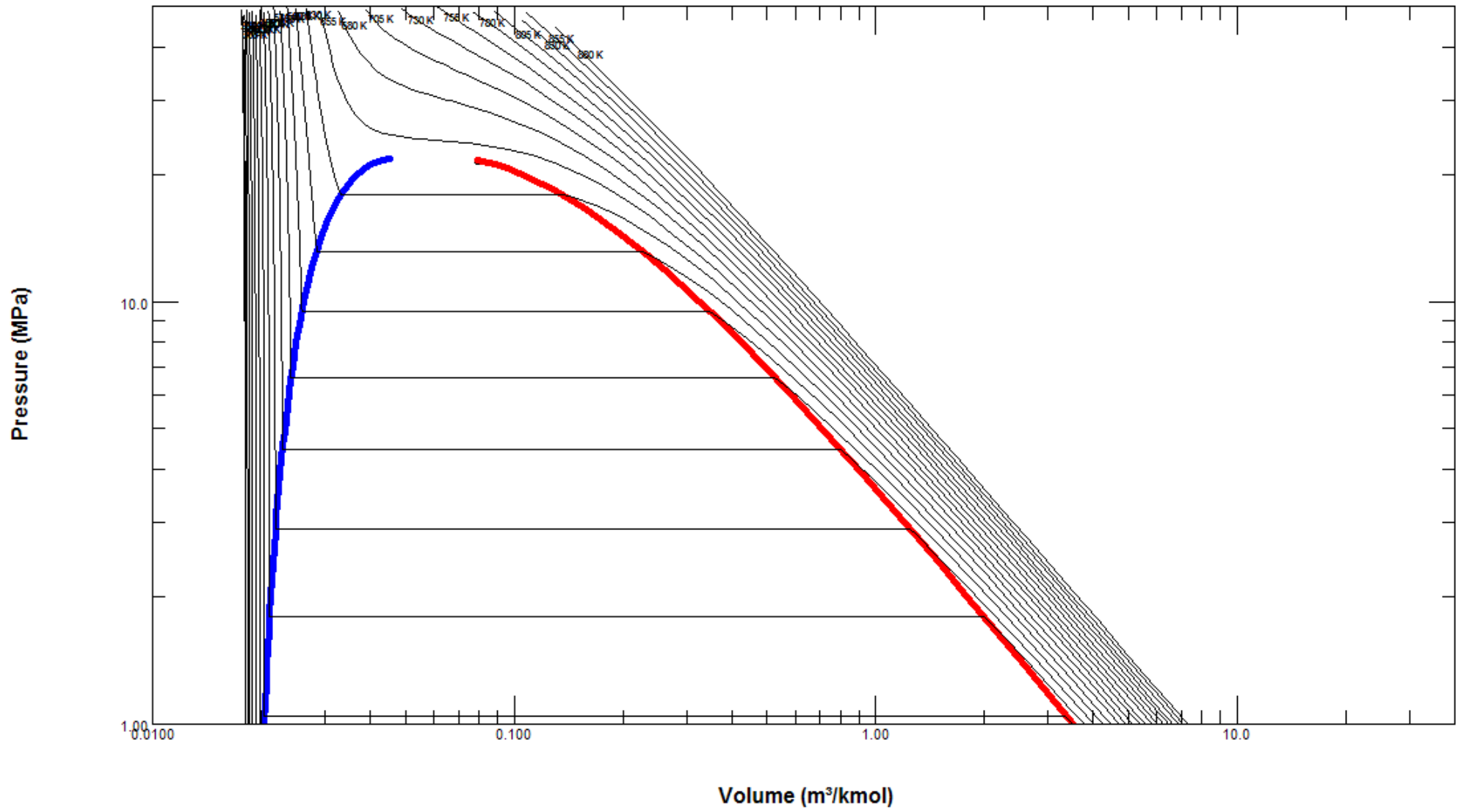
# Wasserdampf

## Temperatur-Entropie-Diagramm



T-s diagram for water. [Source: Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, and Joan G. Moore, *Steam Tables* (New York: John Wiley & Sons, 1969).]





# Trasformazioni termodinamiche

- Trasformazione isoterma:  $T = \text{cost}$
- Trasformazione isobara:  $p = \text{cost}$
- Trasformazione isocora:  $v = \text{cost}$
- Trasformazione politropica:  $c = \text{cost}$
- Trasformazione adiabatica:  $Q = 0$
- Trasformazione isentropica:  $s = \text{cost}$  (n.b. una isentropica deve sempre essere anche adiabatica)



# Trasformazione isoterma

$$c = \infty \quad T = \text{cost} \quad p = A * \rho \quad \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} \quad \Delta U_{12} = 0 \quad \Delta H_{12}$$

$$\bar{L}_{12} = \int_1^2 p \frac{d\rho}{\rho^2} = \int_1^2 A\rho \frac{d\rho}{\rho^2} = \int_1^2 A \frac{d\rho}{\rho} = A \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 \frac{A d\rho}{\rho} = A \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$Q_{12} = L_{12}$$

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} = \frac{p_1}{T\rho_1} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

# Trasformazione isobara

$$c = c_p \quad p = \text{cost} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\bar{L}_{12} = \int_1^2 p \frac{d\rho}{\rho^2} = p \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{p}{\rho_1} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{p}{\rho_1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0$$

$$Q_{12} = \Delta H_{12} = c_p (T_2 - T_1) = c_p T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{c_p p}{R \rho_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) = \frac{k p}{(k-1) \rho_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)$$

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{k}{k-1} R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$



# Trasformazione isocora

$$c = c_v \quad \rho = \text{cost} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\bar{L}_{12} = \int_1^2 p \frac{d\rho}{\rho^2} = 0$$

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = c_v(T_2 - T_1) = c_v T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{c_v p}{R \rho_1} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = \frac{p}{(k-1)\rho_1} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right)$$

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{k-1} R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

# Trasformazione adiabatica

$$c = 0 \quad p = A * \rho^k \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\bar{L}_{12} = \int_1^2 p \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{1}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$Q_{12} = 0 \quad \Delta U_{12} = \bar{L}_{12} \quad \Delta H_{12} = L_{12} \quad \Delta S_{12} = 0$$

# Trasformazione politropica

$$c \neq 0 \quad m = \frac{c_p - c}{c_v - c} \quad p = A \rho^m \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^m \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

dal primo principio della termodinamica:

$$dQ = c_v dT + p dv \Rightarrow \frac{dQ}{dT} = c_v + p \frac{dv}{dT} \Rightarrow c = c_v + p \frac{dv}{dT}$$

dall'espressione delle trasformazioni politropiche:

$$T \cdot v^{m-1} = \text{cost} \Rightarrow dT \cdot v^{m-1} + (m-1) v^{m-2} T dv = 0$$

$$\frac{dT}{dv} = \frac{(1-m) v^{m-2} T}{v^{m-1}} = \frac{(1-m) T}{v} = \frac{(1-m) p}{R}$$

combinando con il primo principio:

$$c = c_v + p \frac{dv}{dT} = c_v + \frac{R}{(1-m)} = c_v + \frac{c_p - c_v}{(1-m)} \Rightarrow m = \frac{c_p - c}{c_v - c}$$

# Trasformazione politropica

$$c \neq 0 \quad m = \frac{c_p - c}{c_v - c} \quad p = \Lambda \rho^m \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^m \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\bar{L}_{12} = \int_1^2 p \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \frac{1}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

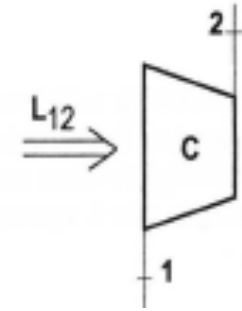
$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

$$Q_{12} = c(T_2 - T_1) = \frac{mc_v - c_p}{m-1} (T_2 - T_1) = \left( \frac{k}{k-1} - \frac{m}{m-1} \right) RT_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$= \left( \frac{k}{k-1} - \frac{m}{m-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

$$\Delta U_{12} = Q_{12} + \bar{L}_{12} \quad \Delta H_{12} = Q_{12} + L_{12} \quad \Delta S_{12} = R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-k}{m(k-1)}}$$

# Compressione



- Per una trasformazione aperta possiamo scrivere:

$$\Delta H + \Delta E_p + \Delta E_c = Q + L$$

- Che in condizioni di velocità uguale in ingresso e uscita e di stessa quota

$$h_1 - h_2 + Q_{12} = L_{12}$$

$$h_1 - h_2 = -Q_{12} - \int_{p_1}^{p_2} v dp$$

- Che vale per trasformazioni reversibili

# Compressione reversibile

- Supponiamo di considerare una compressione politropica reversibile:

$$c \neq 0 \quad m = \frac{c_p - c}{c_v - c} \quad p = A \rho^m \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^m \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

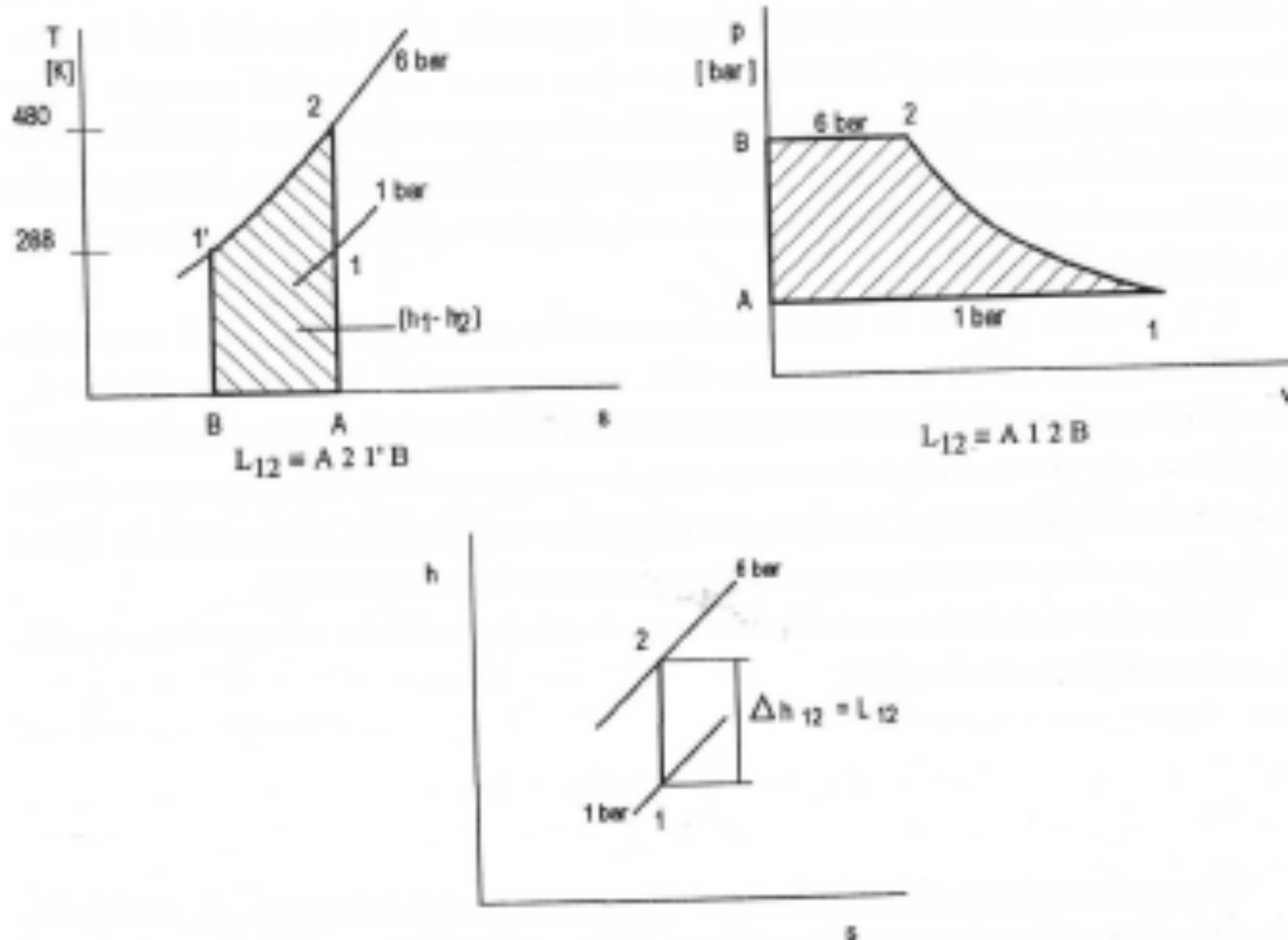
$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

- E una adiabatica reversibile:

$$c = 0 \quad p = A^* \rho^k \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = c_p (T_1 - T_2)$$

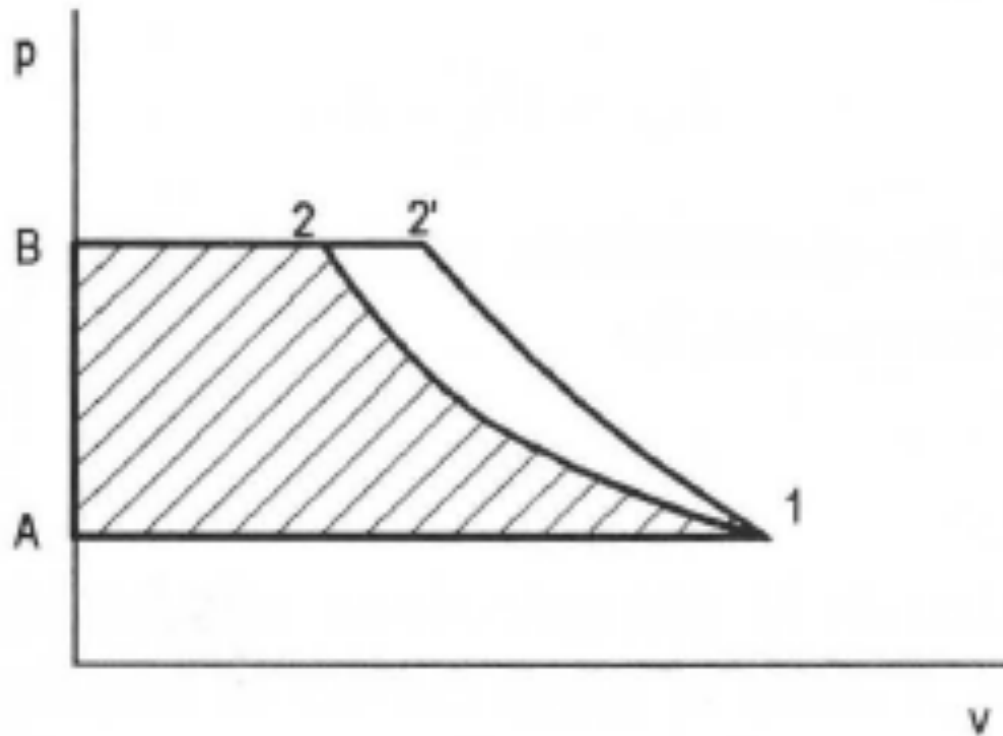
# Compressione reversibile



# Compressione reale

- Possiamo introdurre il lavoro perso per attrito che è  $<0$ :

$$L_{12'} = - \int_{p_1}^{p_2'} v dp + L_a$$

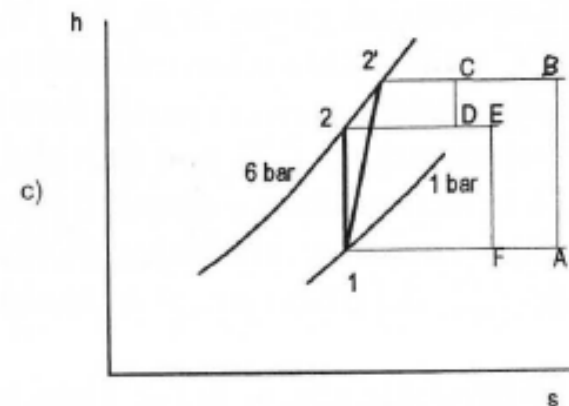
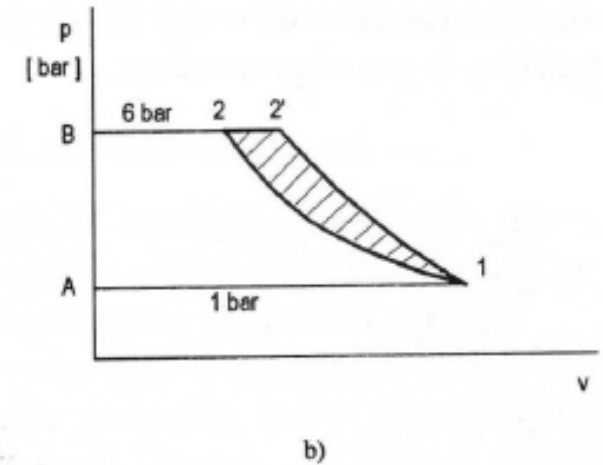
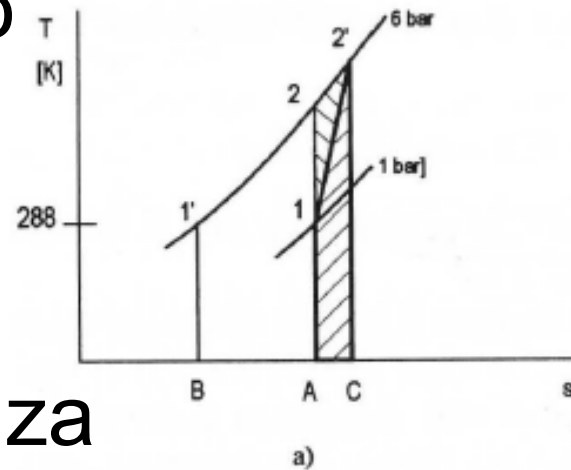




# Compressione adiabatica reale

- Il lavoro adiabatico reale può essere espresso da:  

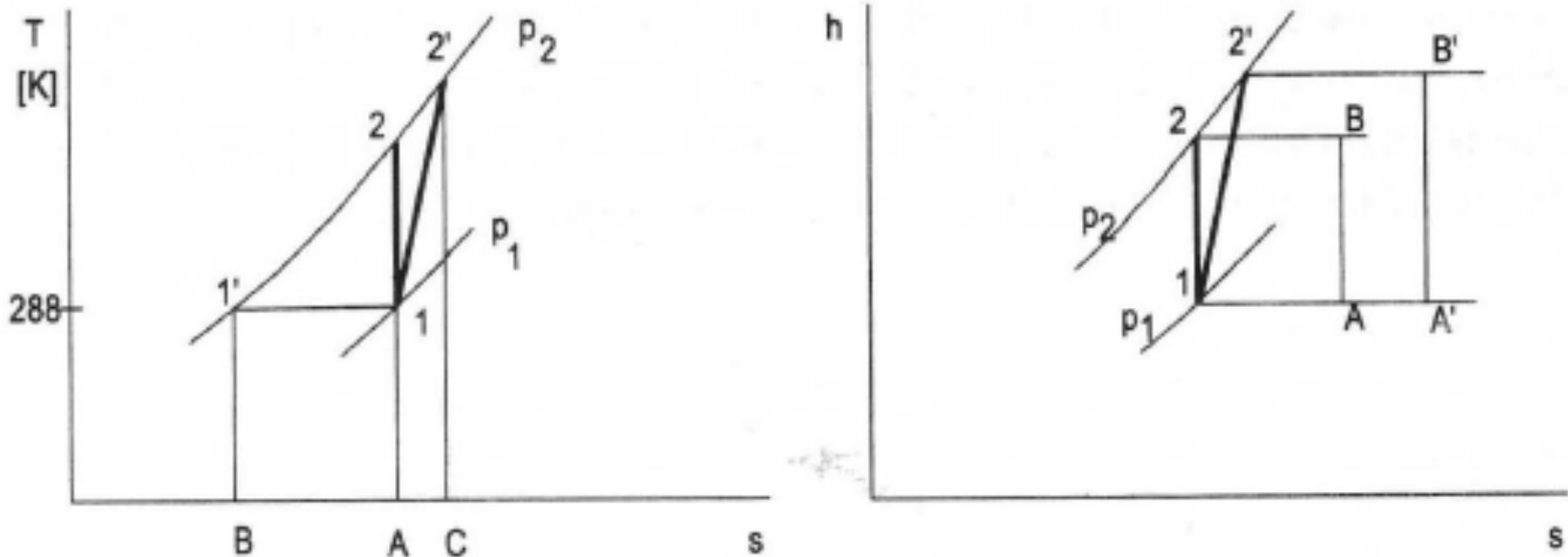
$$L_{12'} = c_p (T_1 - T_{2'})$$
- $A22'C$  è la differenza tra lavoro reale reversibile
- $A12'C$  calore dovuto alle irreversibilità
- $122'$  è il controrecupero



# Rendimento isentropico

- Si definisce rendimento isentropico di compressione il rapporto:

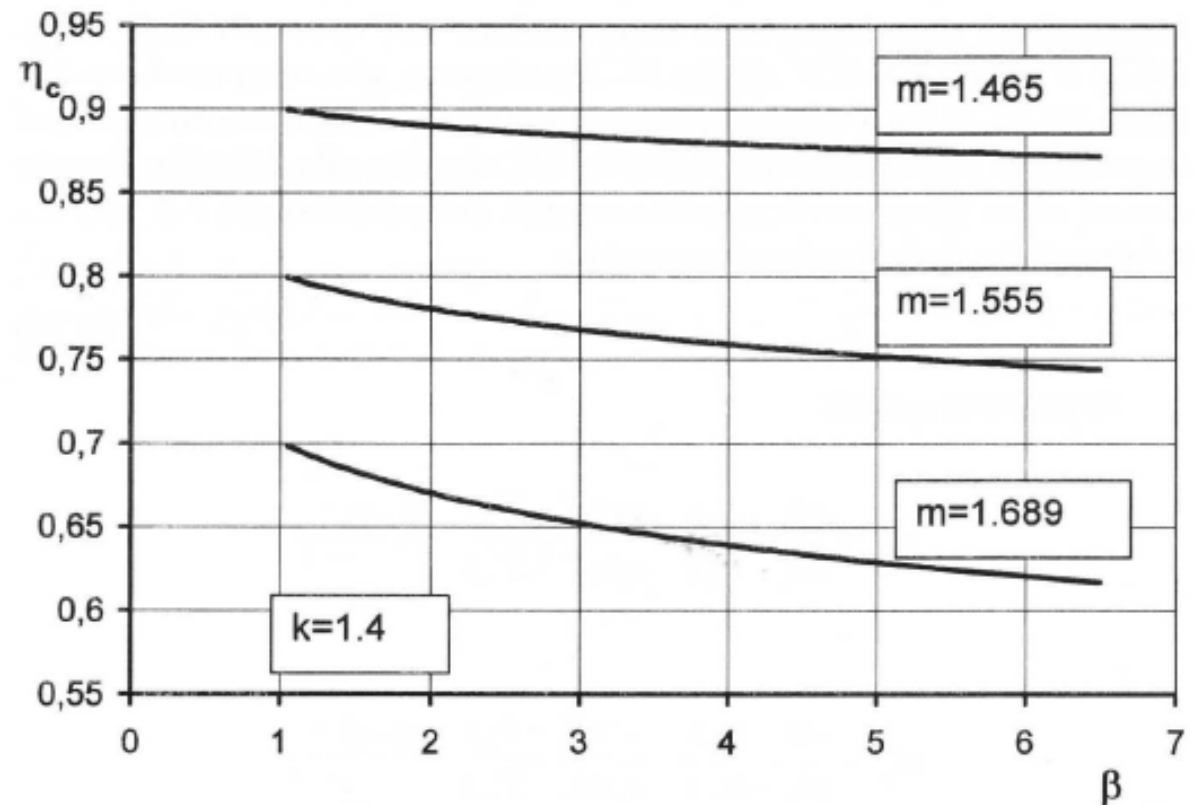
$$\eta_c = \frac{L_{is}}{L_r} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2'}} = \frac{A21'B}{C2'1'B} \Big|_{T-s} = \frac{AB}{A'B'} \Big|_{h-s}$$



# Rendimento di compressione

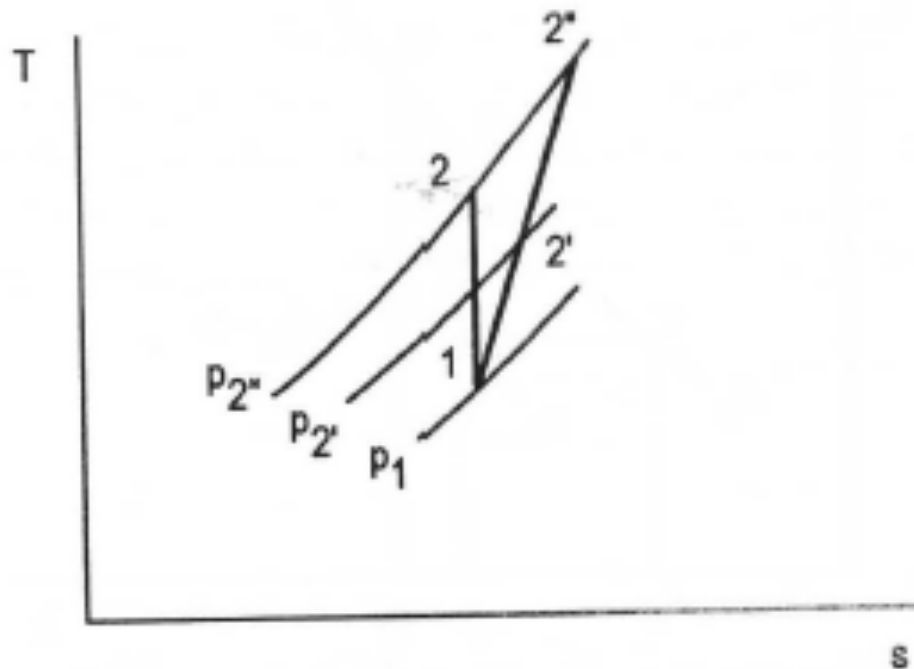
- Supponendo di schematizzare la compressione reale con una politropica, possiamo scrivere:

$$\eta_c = \frac{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}}$$



# Rendimento di compressione

- Dalla figura precedente si può notare che per un dato  $m$ , se  $\beta$  aumenta, il rendimento isentropico diminuisce.



# Rendimento di compressione

- Possiamo definire il rendimento politropico di compressione come il rapporto tra lavoro politropico e lavoro reale. In questo modo raggiungiamo lo stesso punto finale dopo la compressione.

$$\eta_{pol} = \frac{\frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}{h_1 - h_2} = \frac{\frac{m}{m-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}{c_p (T_1 - T_2')} = \frac{\frac{m}{m-1} RT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}{c_p T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]} = \frac{m}{m-1} \frac{k-1}{k}$$

- Il rendimento politropico è sempre maggiore di quello adiabatico e non dipende da  $\beta$

# Rendimento di compressione

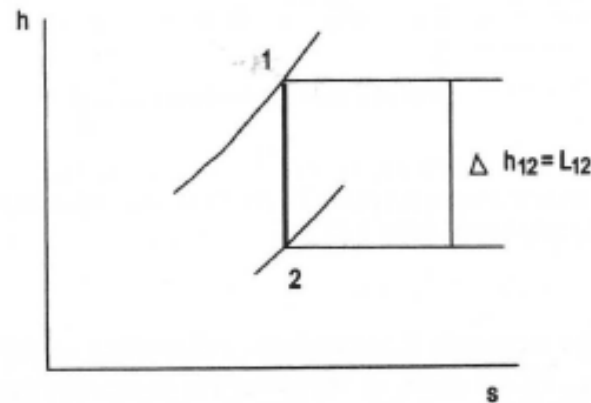
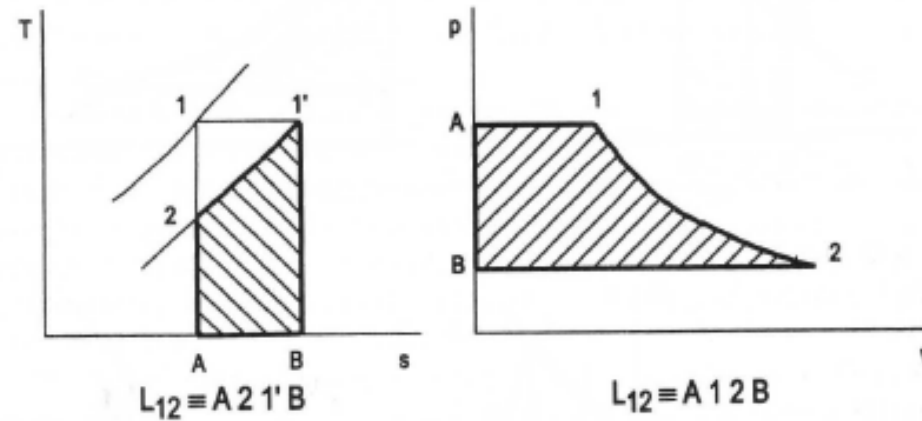
- Sostituendo nell'espressione del rendimento adiabatico l'espressione di  $m$  dal rendimento politropico, otteniamo:

$$\eta_{pol} = \frac{m}{m-1} \frac{k-1}{k} \Rightarrow \frac{m-1}{m} = \frac{k-1}{k\eta_{pol}} \Rightarrow$$

$$\eta_c = \frac{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \beta^{\frac{k-1}{k\eta_{pol}}}}$$

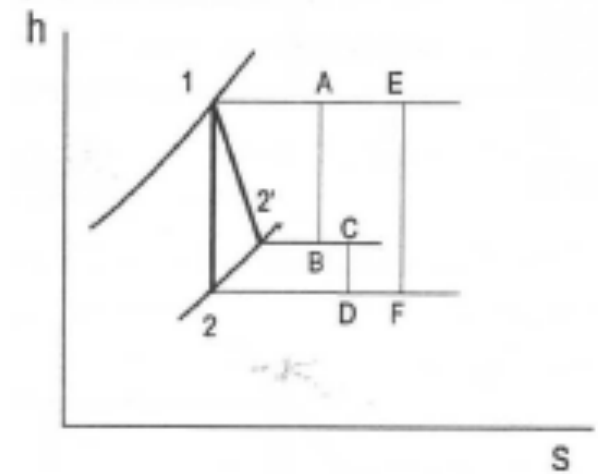
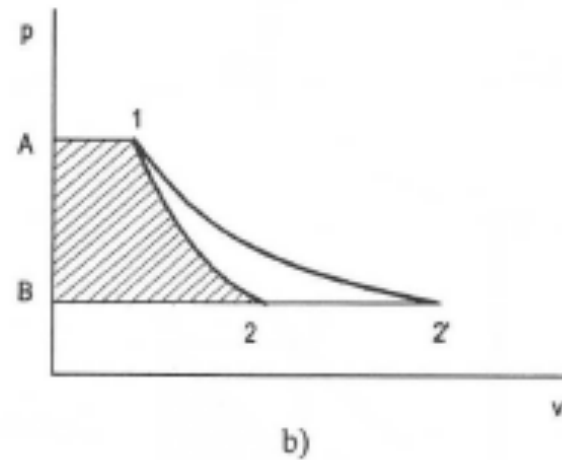
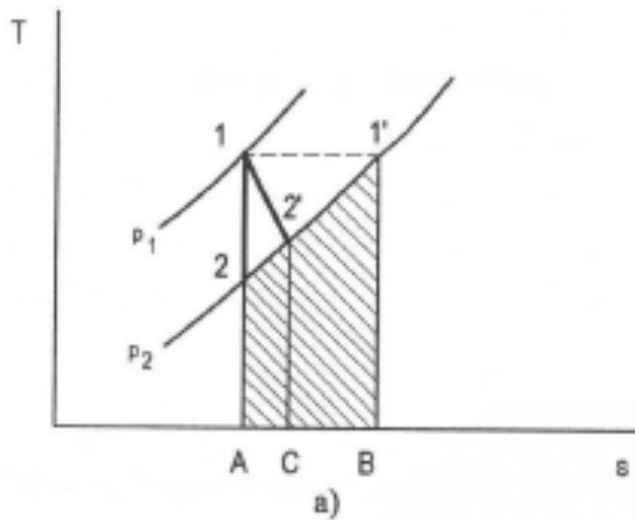
# Espansione adiabatica reversibile

- Nei piani termodinamici l'espansione adiabatica reversibile è rappresentata così



# Espansione adiabatca reale

- Nell'espansione reale abbiamo il fenomeno del recupero (Area 122' nel piano Ts)





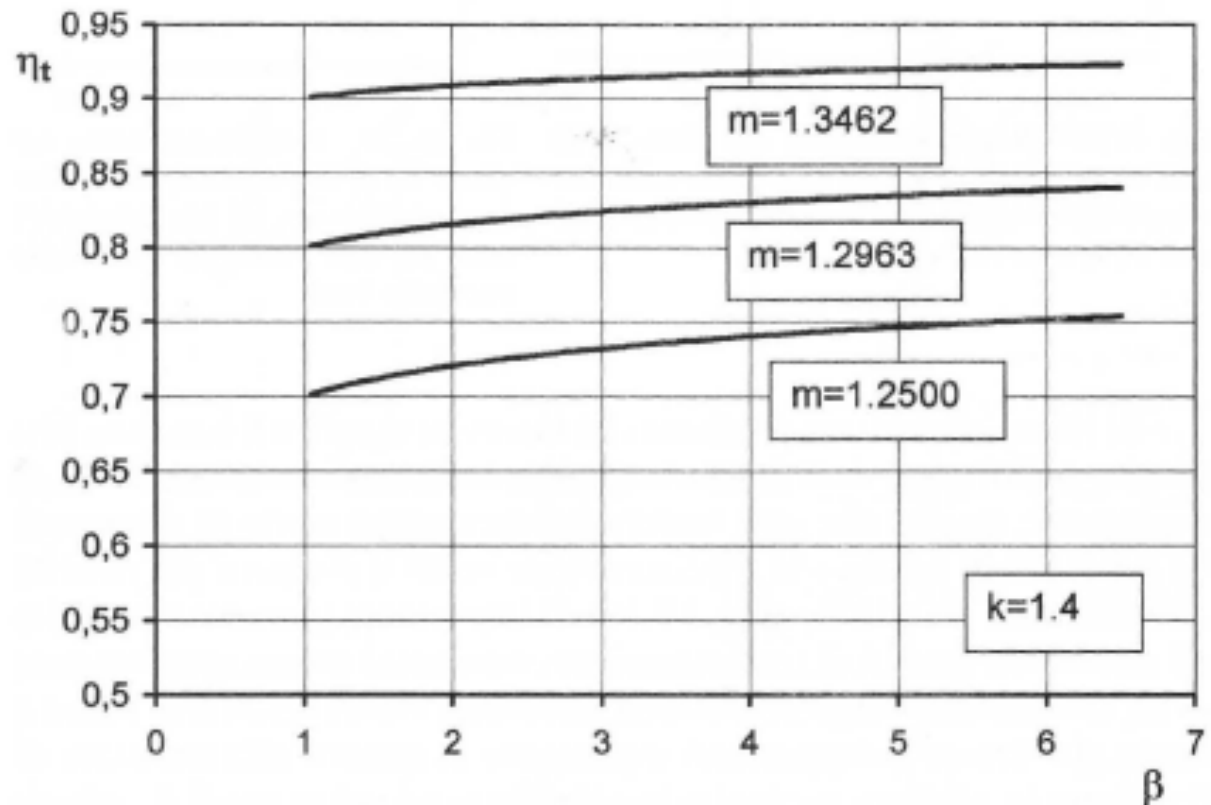
# Rendimento di espansione

- In questo caso scriviamo il lavoro reversibile al numeratore:

$$\eta_t = \frac{1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}}{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}$$

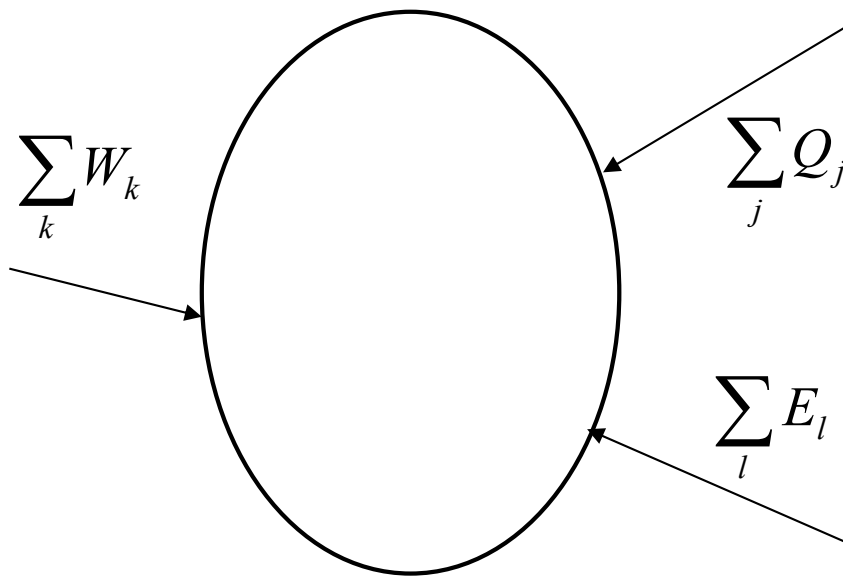
$$\eta_{polt} = \frac{m-1}{m} \frac{k}{k-1}$$

$$\eta_t = \frac{1 - \beta^{\frac{m-1}{m}}}{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - \beta^{\frac{(k-1)}{k}}}{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}$$



# Exergia

- Consideriamo un sistema che scambia energia e massa con l'esterno



$$E = \sum_j h_j M_j - \frac{dU}{dt}$$

$$\sum_k W_k + \sum_j Q_j + \sum_l E_l = 0$$

$$\sum_k dW_k + \sum_j dQ_j + \sum_l dE_l = 0$$

- Separando i termini di scambio termico con l'ambiente:

$$\sum_k \int dW_k + \sum_j \int dQ_j + Q_a + \sum_l \int dE_l = 0 \quad (1)$$

# Exergia

- Dal secondo principio della termodinamica

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \int \frac{dQ_j}{T_j} + \sum_i s_j M_j + \frac{dS_{irr}}{dt}$$

- Separando i termini di scambio termico con l'ambiente:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \int \frac{dQ_j}{T_j} + \frac{Q_a}{T_a} + \sum_i s_j M_j + \frac{dS_{irr}}{dt}$$

- Moltiplicando per  $T_a$

$$\frac{dT_a S}{dt} = \sum_j \int \frac{T_a}{T_j} dQ_j + Q_a + T_a \sum_i s_j M_j + T_a \frac{dS_{irr}}{dt} \quad (2)$$

# Exergia

- Combinando la (1) e la (2):

$$\sum_k W_k + \sum_j \int \left(1 - \frac{T_a}{T_j}\right) dQ_j + \sum_j (h_j - T_a s_j) M_j - \frac{d(U - T_a S)}{dt} - T_a \frac{dS_{irr}}{dt} = 0 \quad (3)$$

- La (3) combina il primo e il secondo principio della termodinamica ed è una prima forma di bilancio exergetico.
- Si può definire l' exergia come il massimo lavoro ottenibile lungo una trasformazione reversibile tra due stati termodinamici.

# Exergia

- Osserviamo alcuni termini presenti nella (3)

$$\mathcal{G}_j = 1 - \frac{T_a}{T_j} \quad \text{Fattore di Carnot}$$

$$\mathcal{G}_j Q_j \quad \text{Exergia calore}$$

$$A = U - T_a S \quad \text{Exergia trasformazione per sistemi chiusi}$$

$$b = h_j - T_a s_j \quad \text{Exergia trasformazione per sistemi}$$

$$B = H - T_a S \quad \text{aperti}$$

# Exergia

- Possiamo definire l' exergia trasformazione del sistema

$$\Xi = \sum_j (h_j - T_a s_j) M_j - \frac{d(U - T_a S)}{dt} \quad (4)$$

- Combinando la (4) con la (3):

$$\sum_k W_k + \sum_j \int \mathcal{Q}_j dQ_j + \Xi - T_a \frac{dS_{irr}}{dt} = 0$$

- L' ultimo termine rappresenta le irreversibilità nel sistema

$$L_x = T_a \frac{dS_{irr}}{dt} \quad (5)$$

- Pertanto la (5) può essere espressa come:

$$\sum_k W_k + \sum_j \int \mathcal{Q}_j dQ_j + \Xi = L_x \quad (6)$$

# Exergia

- Il lavoro che il sistema fa sull' esterno è dato da:

$$W^- = \sum_j \int \mathcal{G}_j dQ_j + \Xi - L_x \quad (7)$$

- Il lavoro massimo che il sistema fa sull' esterno è dato da:

$$W_{\max}^- = \sum_j \int \mathcal{G}_j dQ_j + \Xi \quad (8)$$

- Tutto il lavoro che non può essere ottenuto è dato dalle perdite exergetiche:

$$L_x = W_{\max}^- - W^- \quad (9)$$

- Pertanto le perdite exergetiche indicano la quantità di lavoro che si perde a causa delle irreversibilità dei processi

# Exergia

- Possiamo scrivere il bilancio in forma integrale:

$$X^- + W^- = X^+ + W^+ - L_x \quad (10)$$

- $X$  sarà in genere exergia calore o trasformazione

$$\eta_x = \frac{X^- + W^-}{X^+ + W^+} = 1 - \frac{L_x}{X^+ + W^+} \quad (11)$$

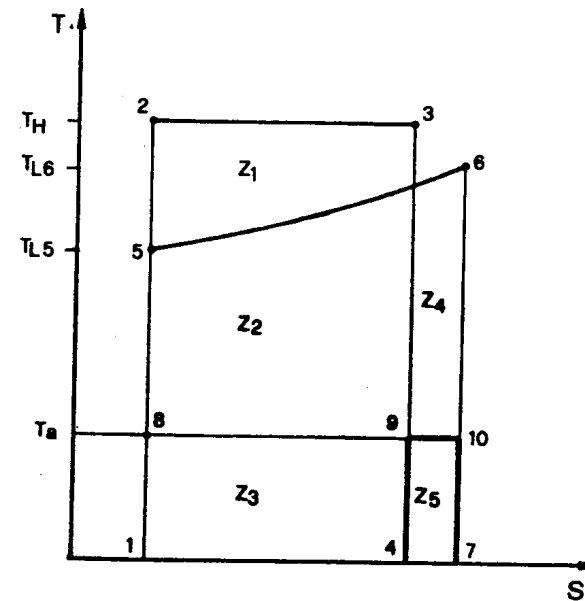
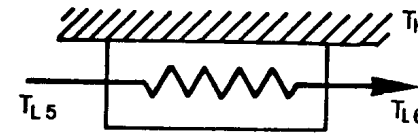
- La (11) definisce il rendimento exergetico che assume valori inferiori all'unità anche quando il processo sembra avere le caratteristiche di non avere fenomeni dissipativi, quali ad esempio lo scambio di calore tra due fluidi a temperatura diversa in uno scambiatore perfettamente isolato verso l'ambiente.



# Exergia – Esempio 1

- Scambio di calore con una sorgente a temperatura costante.
- Il bilancio exergetico può essere scritto:

$$X^- = X^+ - L_x$$



# Exergia – Esempio 1

- E' possibile scrivere:

$$X^+ = Q_1 \left( 1 - \frac{T_a}{T_H} \right) = (T_H - T_a)(S_4 - S_1) = AREA(8,2,3,9,8) = z_1 + z_2$$

$$\begin{aligned} X^- &= \int \mathcal{Q} dQ = \int \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right) dQ = \int dQ - T_a \int \left( \frac{dQ}{T} \right) = Q_2 - T_a(S_6 - S_5) = \\ &= AREA(1,5,6,7,1) - AREA(1,8,10,7,1) = AREA(8,5,6,10,8) = z_2 + z_4 \end{aligned}$$

- Dato che  $Q_1 = Q_2$

$$AREA(1,2,3,4,1) = AREA(1,5,6,7,1) = z_1 + z_2 + z_3 = z_2 + z_3 + z_4 + z_5$$

$$\Rightarrow z_1 = z_4 + z_5$$

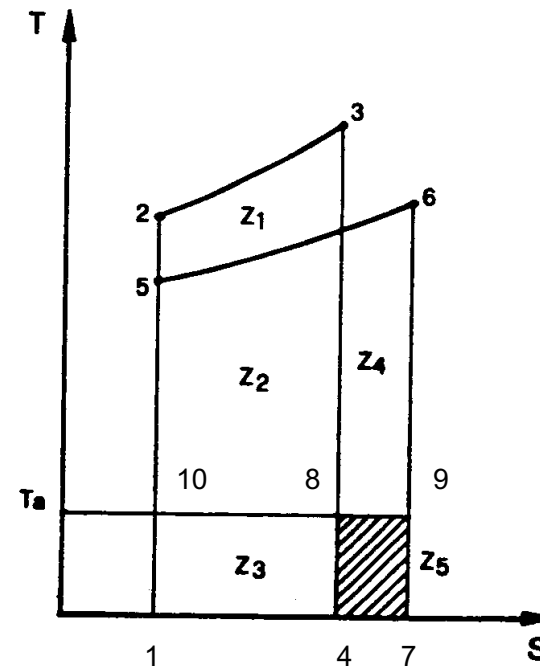
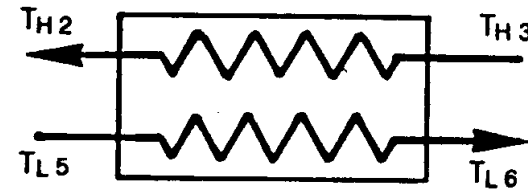
- Quindi la perdita exergetica è:

$$L_x = X^+ - X^- = z_1 + z_2 - z_2 - z_4 = z_1 - z_4 = z_5$$

# Exergia – Esempio 2

- Scambio di calore tra due sorgenti a temperatura variabile.
- Il bilancio exergetico può essere scritto:

$$X^- = X^+ - L_x$$



# Exergia – Esempio 2

- E' possibile scrivere:

$$\begin{aligned} X^+ &= \int \mathcal{Q} dQ = \int \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) dQ = \int dQ - T_a \int \left(\frac{dQ}{T}\right) = Q_1 - T_a (S_3 - S_2) = \\ &= AREA(1,2,3,4,1) - AREA(1,10,8,4,1) = AREA(10,2,3,8,10) = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^- &= \int \mathcal{Q} dQ = \int \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) dQ = \int dQ - T_a \int \left(\frac{dQ}{T}\right) = Q_2 - T_a (S_6 - S_5) = \\ &= AREA(1,5,6,7,1) - AREA(1,10,9,7,1) = AREA(10,5,6,9,10) = z_2 + z_4 \end{aligned}$$

- Dato che  $Q_1 = Q_2$

$$AREA(1,2,3,4,1) = AREA(1,5,6,7,1) = z_1 + z_2 + z_3 = z_2 + z_3 + z_4 + z_5$$

$$\Rightarrow z_1 = z_4 + z_5$$

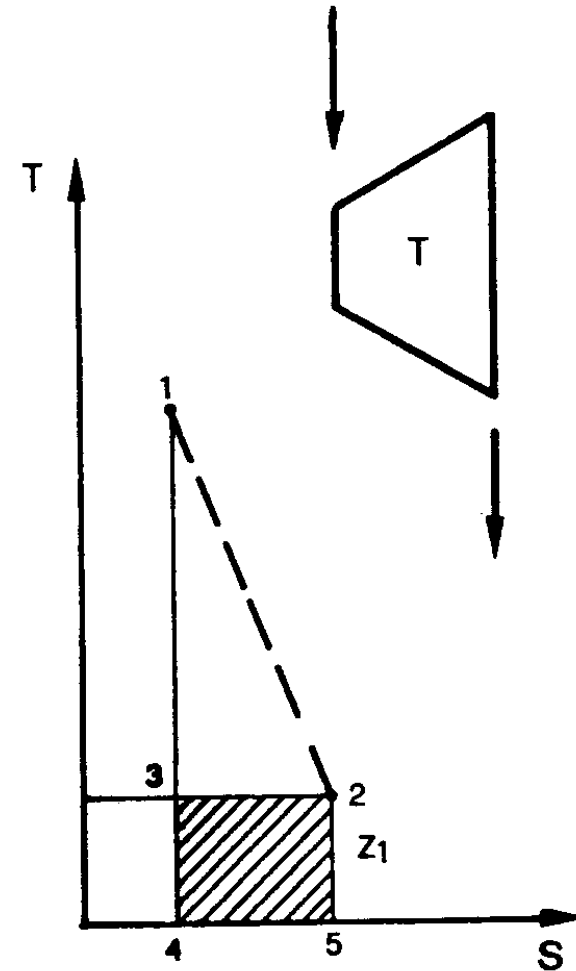
- Quindi la perdita exergetica è:

$$L_x = X^+ - X^- = z_1 + z_2 - z_2 - z_4 = z_1 - z_4 = z_5$$

# Exergia – Esempio 3

- Espansione adiabatica in turbina.
- Il bilancio exergetico può essere scritto:

$$X^- + W^- = X^+ - L_x$$



# Exergia – Esempio 3

- E' possibile scrivere:

$$M_2 = M_1$$

$$X^+ = M(h_1 - T_a s_1)$$

$$X^- = M(h_2 - T_a s_2)$$

$$W^- = M(h_1 - h_2)$$

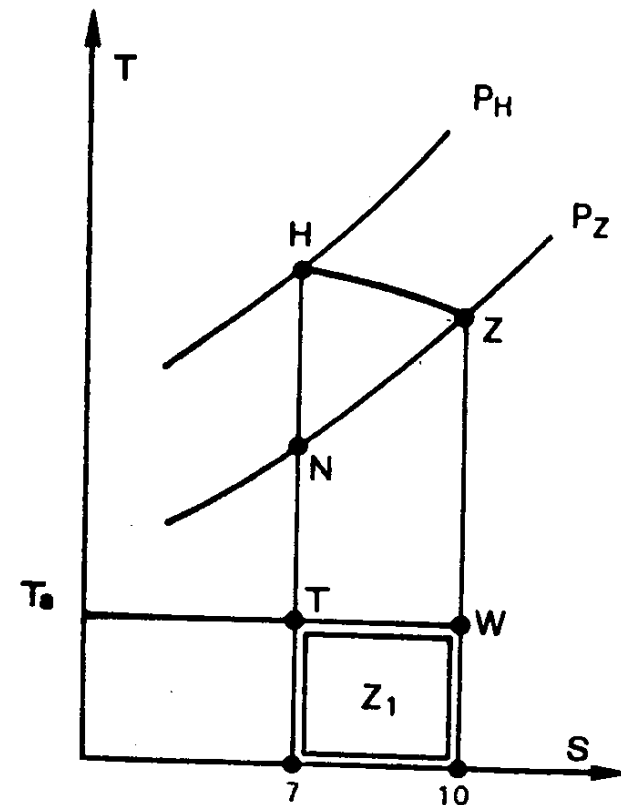
- Quindi la perdita exergetica è:

$$L_x = X^+ - X^- - W^- = MT_a(s_2 - s_1) = z_1$$

# Exergia – Esempio 4

- Laminazione paraisoentalpica in una valvola.
- Il bilancio exergetico può essere scritto:

$$X^- = X^+ - L_x$$



# Exergia – Esempio 4

- E' possibile scrivere:

$$M_H = M_Z$$

$$X^+ = M(h_H - T_a s_H)$$

$$X^- = M(h_Z - T_a s_Z)$$

$$h_H = h_Z$$

- Quindi la perdita exergetica è:

$$\begin{aligned} L_x &= X^+ - X^- = (h_H - T_a s_H) - (h_Z - T_a s_Z) = \\ &= T_a (s_Z - s_H) = z_1 \end{aligned}$$