CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2018/2019 – Prova Scritta 04/11/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $T_n = (t_{i,j}) = \texttt{tridiag}(c, d, e, n)$ la matrice tridiagonale di ordine n con elementi diagonali uguali a d. elementi sottodiagonali uguali a c ed elementi sopradiagonali uguali a e, cioè

$$t_{i,j} = \begin{cases} d \text{ se } i = j; \\ c \text{ se } i = j + 1; \\ e \text{ se } i = j - 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Sia

$$A_n = \frac{1}{h}\texttt{tridiag}(-1, 2, -1, n) + \frac{h}{6}\texttt{tridiag}(1, 4, 1, n), \quad h > 0.$$

1. Si mostri che A_n è predominante diagonale.
2. Si mostri che per gli autovalori λ_i di A_n vale $\frac{h}{3} \leq \lambda_i \leq \frac{4}{h} + h$, $1 \leq i \leq n$. Se ne deduca una maggiorazione per il numero di condizionamento in norma 2 della matrice A_n.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ e $tol \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo di Gauss-Seidel con vettore iniziale nullo applicato per la risoluzione del sistema lineare $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ arrestandosi quando $\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1} \|_\infty \leq tol$ e restituendo in uscita la coppia $(\boldsymbol{x}_k, k)$. Per $n \in \{64, 1024\}$, $h = 0.1$, $tol = 1.0e-12$ e $\boldsymbol{b} = \texttt{ones}(n, 1)$ riportare i valori di k restituiti dal programma.

Esercizio 2 Per il calcolo della radice cubica di un numero $a > 0$ si considera il metodo di Newton applicato per la risoluzione delle equazioni

$$f(x) = x^3 - a = 0, \quad g(x) = \frac{a}{x^3} - 1 = 0.$$

1. Si mostri che il metodo di Newton applicato a $f(x) = 0$ converge per ogni $x_0 > 0$.
2. Si mostri che il metodo delle tangenti applicato a $g(x) = 0$ converge per ogni x_0 tale che $0 < x_0 < b$ con b da determinare.
3. Si scrivano due funzioni MatLab che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ calcolano rispettivamente la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a $g(x) = 0$ e la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a $f(x) = 0$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-12}$ o $k > 100$. Le funzioni devono restituire in uscita la coppia (x_k, k). Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = -0.6$ per $a = 1$.