CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2018/2019 – Prova Scritta 11/11/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ se } i=j=1 \text{ o } i=j=n \\ 1 \text{ se } 2 \leq i=j \leq n-1, \\ 1 \text{ se } i=1, j\neq 1, \text{ o } i=n, j\neq n \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

ad esempio per $n=5$ abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Si mostri che il metodo di Jacobi applicato ad A è convergente.
2. Detta J la matrice di iterazione si calcoli $\parallel J^2 \parallel_1$ e si determini un numero di iterazioni K sufficienti a garantire che $\parallel \boldsymbol{e}^{(K)} \parallel_1 / \parallel \boldsymbol{e}^{(0)} \parallel_1 \leq 2^{-40}$.
3. Si scriva una funzione MATLAB che dati in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ restituisce il vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ generato dall metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \texttt{ones}(\texttt{n}, \texttt{1})$ applicato per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, arrestandosi quando $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\|_1 \leq 2^{-40}$ o se sono state fatte più di 100 iterazioni. La funzione deve avere costo lineare in n e nel numero di passi. Per $\boldsymbol{b} = \texttt{ones}(100, 1)$ si riporti il valore di k ottenuto.

Esercizio 2 Dato $a > 0$ si consideri l'equazione

$$f(x) = a - \log x = 0$$

1. Si mostri che l'equazione ammette una sola soluzione reale denotata con α.
2. Si mostri che la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a $f(x) = 0$ con $x_0 = 1$ converge ad α.
3. Si scriva una funzione MATLAB che dato in input $a \in \mathbb{R}^+$ calcola la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a $f(x) = 0$ con punto iniziale $x_0 = 1$ arrestandosi quando $\dfrac{|x_k - \texttt{exp}(a)|}{\texttt{exp}(a)} < 2^{-40}$ o $k > 100$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k). Si riportino i valori di k ottenuti per $a = 1$ e $a = 10$.