CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2019/2020 – Correzione Appello 08/01/2020

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Risolvendo $M\boldsymbol{x} = [1, \dots, 1, 0]^T$ si ottiene $\boldsymbol{x} = \left[1/2, 3/4, \dots, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right]^T$ da cui si ottiene che $P = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_n^T$ è triangolare superiore e e $\rho(P) = \frac{2^{n-1}-1}{2^n} < 1/2$.

2. Il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è equivalente a $(I - P)\boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$. La matrice $I - P$ è invertibile e quindi la soluzione esiste ed è unica.

3.
```
function [x0,it, err] = ing_08_01_20_linear(b)
n=length(b);
x0=ones(n,1);
err=inf; it=0; tol=2^(-40);
while err>tol && it<=100
    x0old=x0;
    x0(1)=(x0(n)+b(1))/2 ;
    for k=2:n-1
        x0(k)=(x0(k-1)+x0(n)+b(k))/2;
    end
    x0(n)=(x0(n-1)+b(n))/2;
    it=it+1;
    err=norm(x0-x0old,1);
end
end
```
   Per il dato $\boldsymbol{b}$ si ottiene $k = 48$ per $n = 100$ e $k = 51$ per $n = 1000$.

4. Per iterazione sono richieste $4n + O(1)$ operazione additive + n divisioni (per 2).

Esercizio 2

1. Si ha $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Poichè $e^2 > 4$ la ricerca delle soluzioni positive si può restringere all'intervallo $[0, 2]$. Si ha $f'(x) = e^x - 4\cos x$ e $f''(x) = e^x + 4\sin x$. Sull'intervallo $[0, 2]$ si ha $f''(x) > 0$ e quindi $f'(x)$ monotona crescente. Da $f'(0) < 0$ e $f'(2) > 0$ si ricava che esiste β in $(0, 2)$ tale che $f'(x) < 0$ per $0 \le x < \beta$ e $f'(x) > 0$ per $\beta < x \le 2$. Inoltre $4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 2.8 > e$ e quindi $f(\pi/4) < 0$. Ne segue che $f(\beta) < 0$ e quindi esistono 2 soluzioni positive α e γ con $0 < \alpha < \beta < \gamma < 2$.

2. Dal teorema di convergenza in grande segue che la successione generata a partire da $x_0 = 0$ converge a α mentre la successione generata a partire da $x_0 = 2$ converge a γ.

```
function [x,it] = ing_08_01_2020(x0)
it=0;
```

```
tol=2^(-40);
f=@(x)exp(x)-4 *sin(x);
f1=@(x)exp(x)-4*cos(x);
err=inf;
while(err>tol && it<1000)
    x=x0-f(x0)/f1(x0);
    err=abs(x-x0);
    it=it+1;
    x0=x;
end
end
```

Per $x_0 = 0$ si ha $it = 5$ e $x = 3.705580959698245e - 01$ mentre per $x_0 = 2$ si ottiene $it = 7$ e $x = 1.364958433733097e + 00$.