

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
A.A. 2019/2020 – Prova Scritta 08/01/2020

---

NOME

COGNOME

MATRICOLA

---

**Esercizio 1** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } i = j + 1 \text{ o } j = n, i \neq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ad esempio per  $n = 5$  abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Si determini la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato ad  $A$  e se ne valuti il raggio spettrale.
2. Si mostri che  $A$  è invertibile.
3. Si scriva una funzione MATLAB che dato in input  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  restituisce il vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  generato dal metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{ones}(n, 1)$  applicato per la risoluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , arrestandosi quando  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_1 \leq 2^{-40}$  o se sono state fatte più di 100 iterazioni. Per  $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(n, 1)$ ,  $n \in \{100, 1000\}$ , si riportino i valori di  $k$  ottenuti.
4. Si valuti il costo computazionale di un'iterazione dell'algorithm implementato al punto precedente.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione

$$f(x) = e^x - 4 \sin x = 0$$

1. Si determini il numero di soluzioni positive dell'equazione
2. Si analizzi la convergenza delle successioni generate dal metodo delle tangenti applicato a  $f(x) = 0$  con  $x_0 = 0$  e  $x_0 = 2$  rispettivamente.
3. Si scriva una funzione MATLAB che dato in input  $x_0$  calcola la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a  $f(x) = 0$  con punto iniziale arrestandosi quando  $|x_{k+1} - x_k| < 2^{-40}$  o  $k > 1000$  e restituendo in uscita la coppia  $(x_k, k)$ . Si riportino i valori di  $k$  e  $x_k$  ottenuti per  $x_0 = 0$  e  $x_0 = 2$ .