CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2019/2020 – Correzione Appello 28/01/2020

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. La matrice A_k, $1 \le k \le n-1$, è triangolare inferiore con elementi non nulli sulla diagonale principale e quindi invertibile. L'esistenza della fattorizzazione LU $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ segue dal teorema di esistenza ed unicità. Dalla dimostrazione del teorema segue che

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \boldsymbol{v} \\ \hline \boldsymbol{w}^T & n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{x}^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{0}^T & \beta \end{array}\right],$$

con

$$L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \frac{n-1}{n-2}\alpha & 1 \end{bmatrix}, U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi $\boldsymbol{x}^T = \left[0, \dots, 0, \frac{n}{n-1}\alpha\right]$, $\boldsymbol{y} = \left[-\alpha, 2\alpha^2, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)\alpha^{n-1}\right]^T$ e $\beta + (-1)^{n-1} n\alpha^n = n$ da cui $\beta = n(1 + (-1)^n \alpha^n)$.

2. Si ha che A è singolare se e solo se $\beta = 0$. Dunque se n è pari A è invertibile mentre se n è dispari A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 1$.

3.
```
function [x] = ing_28_01_2020_linear(b, alpha)
n=length(b); p=mod(n,2);
y=zeros(n,1); x=zeros(n,1);
%%risolvo Ly=b
y(1)=b(1);
y(2)=b(2)-2*alpha*y(1);
for k=3:n
    y(k)=b(k)-(k/(k-1))*alpha*y(k-1);
end
%%risolvo Ux=y
alphav=zeros(n,1); alphav(1)=alpha;
for k=2:n
    alphav(k)=alpha*alphav(k-1);
end
if(p==1)
    beta=n*(1-alphav(n)); ii=-1;
else
    beta=n*(1+alphav(n)); ii=1;
end
x(n)=y(n)/beta;
```

```
for k=n-1:-1:1
    ii=ii*(-1);
    x(k)=(y(k)-ii*k*alphav(k)*x(n))/k;
end
end
```

Per il dato $\boldsymbol{b}$ si ottiene $\| A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \|_2 = 4.1272e-12$.

Esercizio 2

1. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = 2$ e $f(1) = -4$. Per il teorema di esistenza degli zeri si conclude che esiste almeno una soluzione in $I = [0, 1]$. Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 7 < 0 \ \forall x \in I$ e quindi l'unicità segue dalla monotonia di $f(x)$ per $x \in I$.

2. Si ha $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, con $g(x) = \frac{x^3+2}{7}$. Vale $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g(\alpha) = \alpha$, $g'(x) = 3x^2/7$ e quindi $g'(x) = |g'(x)| < 1$ se e solo se $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$. Essendo $f(1/2) < 0$ segue che $\alpha < 1/2$ e quindi posto $\rho = 1 - \alpha$ vale $[0, 1] \subset [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset (-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3})$. La convergenza per punti iniziali in I segue allora dal teorema del punto fisso.

   ```
   function [x0,it] = ing_28_01_2020_nolinear(x0)
   g=@(x)x^3+2;  g0=g(x0); z=g0-7*x0;
   err=abs(z); it=0;  tol=2^(-40);
   while(err>=tol & it<=1000)
       x0=g0/7;
       g0=g(x0);
       z=g0-7*x0;
       it=it+1;
       err=abs(z);
   end
   end
   ```

   Per $x_0 = 0$ si ha $it = 9$ e $x0 = 2.891685464483006e-01$ mentre per $x_0 = 1$ si ottiene $it = 10$ e $x0 = 2.891685464483317e-01$.