

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
A.A. 2019/2020 – Prova Scritta 28/01/2020

---

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

---

**Esercizio 1** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e per  $n \geq 3$  si consideri la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{se } i = j \\ i\alpha & \text{se } i = j + 1 \text{ e } j = 1, \dots, n - 1 \\ -\alpha & \text{se } i = 1 \text{ e } j = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio per  $n = 4$  abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 2\alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  ammette fattorizzazione LU. Per tali valori si determini la fattorizzazione.
2. Si dica se esistono valori del parametro  $\alpha$  per cui la matrice  $A$  risulta singolare.
3. Si scriva una funzione Matlab che dati in ingresso il parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  e il vettore  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  risolve il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  utilizzando la fattorizzazione LU di  $A$  determinata sopra. La funzione deve restituire in uscita il vettore  $\mathbf{x}$ . Per  $\alpha = -1$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(512, 1)$ , si riporti il valore di  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$  con  $\mathbf{x}$  il vettore restituito dalla funzione implementata.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione

$$f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0.$$

1. Si mostri che in  $I = [0, 1]$  l'equazione ha una ed una sola soluzione denotata con  $\alpha$ .
2. Si mostri che il metodo di iterazione funzionale  $x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2}{7}$ ,  $k \geq 0$ , genera successioni convergenti ad  $\alpha$  per ogni scelta del punto iniziale  $x_0 \in I$ .
3. Si scriva una funzione MATLAB che dato in input  $x_0$  calcola la successione generata dal metodo di cui sopra con punto iniziale  $x_0$  arrestandosi quando  $|f(x_k)| < 2^{-40}$  o  $k > 1000$  e restituendo in uscita la coppia  $(x_k, k)$ . Si riportino i valori di  $k$  e  $x_k$  ottenuti per  $x_0 = 0$  e  $x_0 = 1$ .