

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica  
A.A. 2019/2020 – Prova Scritta 18/02/2020

---

NOME

COGNOME

MATRICOLA

---

**Esercizio 1** Sia  $\alpha > 2$ ,  $n \geq 2$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i = j + 1 \text{ o } j = i + 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio per  $n = 4$  abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

1. Si mostri che  $A$  ha  $n$  autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positivi.
2. Si mostri che  $\mathcal{K}_2(A) \leq \frac{\alpha+2}{\alpha-2}$ .
3. Si scriva una funzione Matlab che dati in ingresso  $n$ ,  $tol$  e  $\alpha$  implementa il metodo delle potenze applicato ad  $A$  definito da

$$\begin{cases} \mathbf{z}_k = A\mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{z}_k / \|\mathbf{z}_k\|_\infty, & k \geq 0 \end{cases}$$

con vettore iniziale  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{ones}(n, 1)$  arrestandosi quando

$$\left| \frac{\mathbf{z}_{k+1}(1)}{\mathbf{x}_{k+1}(1)} - \frac{\mathbf{z}_k(1)}{\mathbf{x}_k(1)} \right| \leq tol.$$

Per  $n = 100$ ,  $tol = 1.0e - 8$  e  $\alpha = 3$  riportare l'approssimazione dell'autovalore dominante di  $A$  calcolata dal programma.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{1 - e^x} = 0.$$

1. Si mostri che l'equazione ha una ed una sola soluzione denotata con  $\alpha$ .
2. Si mostri che il metodo delle tangenti genera successioni convergenti ad  $\alpha$  per ogni punto iniziale  $x_0 < 0$ .
3. Si scriva una funzione MATLAB che dato in input  $x_0$  e  $tol$  calcola la successione generata dal metodo delle tangenti con punto iniziale  $x_0$  arrestandosi quando  $|x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}| \leq tol$  e restituendo in uscita la coppia  $(x_k, k)$ . Si riportino i valori di  $k$  ottenuti per  $x_0 = -0.1$  e  $x_0 = -100$  con  $tol = 1.0e - 8$ .