Rappresentazione in macchina: esempi

Esempio: rappresentiamo in numeri di macchina con $B = 10$, $t = 4$ il numero $x = \frac{20}{3}$.

$10^0 \cdot 6.666\ldots$

$$x = 6.666666\ldots = 10^1 \cdot \underbrace{0.666666}_{6B^{-1}+6B^{-2}+6B^{-3}+\ldots}\ldots = 10^2 \cdot 0.0666\ldots$$

Il primo coefficiente non-zero dev'essere quello di B^{-1}, quindi altre scelte dell'esponente (ad esempio $x = 10^2 \cdot 0.066666\ldots$) non vanno bene!

Rappresentando per troncamento, prendiamo solo le prime $t = 4$ cifre dopo la virgola:

$$\tilde{x} = \mathrm{fl}(x) = 10^1 \cdot 0.6666.$$

Una scelta più comune è l'arrotondamento, cioè scegliere il numero di macchina più vicino, che può essere (come in questo caso) più grande di x:

$$\tilde{y} = \mathrm{fl}(x) = 10^1 \cdot 0.6667.$$

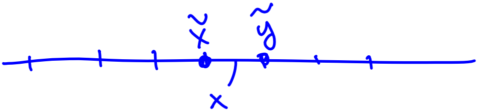
Rappresentazione in macchina: spaziatura

B^p $\quad$ B^{-t}

$$\underbrace{\tilde{x} = 10^1 \cdot 0.6666}_{\text{num. di macchina}} \leq \underbrace{x = 10^1 \cdot 0.666666\ldots}_{\text{non num. di macchina}} \leq \underbrace{\tilde{y} = 10^1 \cdot 0.6667}_{\text{num. di macchina}}.$$

Il numero di macchina consecutivo a uno dato si ottiene aggiungendo 1 all'ultimo posto; la loro differenza è

$$\tilde{y} - \tilde{x} = 10^1 \cdot 0.0001 = B^p \cdot B^{-t}$$



Rappresentazione in macchina: la "retta reale"

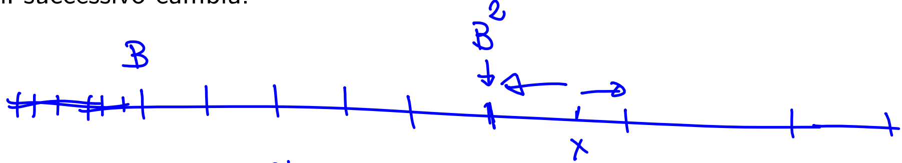
Numeri di macchina ≥ 1:

$10^1 \cdot 0.1000, 10 \cdot 0.1001, 10 \cdot 0.1002, \ldots, 10 \cdot 0.6666, 10 \cdot 0.6667, \ldots, 10 \cdot 0.9999,$

$10^2 \cdot 0.1000, 10^2 \cdot 0.1001, 10^2 \cdot 0.1001, \ldots, 10^2 \cdots 0.9999,$ 10·1

$10^3 \cdot 0.1000, 10^3 \cdot 0.1001, \ldots$

In corrispondenza delle potenze di $B = 10$, la spaziatura tra un numero e il successivo cambia.



$|x-\tilde{x}| \leq \varepsilon |x|$

↳ precisione di macchina

Operazioni di macchina

Dati due numeri di macchina x, y, l'operazione $x \oplus y$ restituisce il numero di macchina più vicino a $x + y$: per esempio, sempre con $B = 10, t = 4$:

$$x = 10, \quad y = 6.666, \quad x \oplus y = \mathrm{fl}(16.666) = 10^2 \cdot 0.1666.$$

$(B=10, t=4)$

Non sempre succede quello che uno si aspetta!

```
a = 1/3;
b = 3*a - 1;
```

$a = 10^0 \cdot 0.3333,$
$b = 0.9999 - 1 = 0.0001.$

Numeri binari

Un computer (per esempio Matlab) lavora in modo analogo ma con base $B = 2$.

$$x = \frac{20}{3} = 2^3 \cdot \underbrace{0.1101010101\ldots_2}_{1\underbrace{B^{-1}}_{=2^{-1}}+1\underbrace{B^{-2}}_{2^{-2}}+0B^{-3}+1B^{-4}+\ldots}.$$

"Double precision": arrotondamento a $\overset{t=}{53}$ cifre dopo la virgola:

$$\tilde{x} = 2^3 \cdot 0.11010101010101010101010101010101010101010101010101011_2.$$

$$0.1 \qquad x = \frac{1}{10} = 2^{-3} \cdot \underbrace{0.1100110011\ldots_2}_{1B^{-1}+1B^{-2}+0B^{-3}+0B^{-4}+\ldots}.$$

$$\tilde{x} = 2^{-3} \cdot 0.11001100110011001100110011001100110011001100110011010_2.$$

Operazioni in virgola mobile

Non sempre succede quello che uno si aspetta!

```
>> a = 10^10
a =
   1.0000e+10
>>
>> b = 10^4
b =
       10000
>> (a+b)^2 - a^2 - 2*a*b - b^2
ans =
        7936
```

10^{20}

Perché? I numeri di macchina intorno a 10^{20} sono spaziati di 16384 l'uno dall'altro:

99999999999999967232, 99999999999999983616, 100000000000000000000, 100000000000000016384, 100000000000000032768, . . .