Esercitazione 2 10/03/2020

$f(x) = e^x \qquad f(x) = \sqrt{x}$

funzione non razionale $\rightarrow$ approssimo con una funzione razionale.

---

① $f(x) = e^x$ Approssimazione razionale $\rightarrow$ Taylor

f è sufficientemente regolare. $\left(f(x) = e^x \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \right)$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)h^n}{n!} + R$$

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot h^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \xi \in \begin{cases} [x_0, x_0+h] & (h \geq 0) \\ [x_0+h, x_0] & (h \leq 0) \end{cases}$$

Formula di Taylor di centro x_0 e raggio h di $f(x)$ arrestata al termine n-esimo.

$$p(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)h^n}{n!}$$

Si dice polinomio di Taylor ottenuto dall'espansione arrestata all'ordine n.

Per l'esponenziale $x_0 = 0$ $h = x$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Approssimazione razionale (polinomio di Taylor) arrestata all'ordine n.

- Scrivere un programma Matlab che approssimi $f(x) = e^x$ con il valore di $P_n(x)$ polinomio di Taylor di grado n ottenuto dall'espansione di Taylor di $f(x)$ arrestata all'ordine n.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Supponiamo di voler approssimare $\sqrt{a}$ $a \geq 0$

$\sqrt{a}$ è soluzione di $x^2 - a = 0$

IDEA: risolvere l'equazione $x^2 - a = 0$

STRUMENTO: METODO DELLE TANGENTI (NEWTON)

GENERA UNA SUCCESSIONE IN ACCORDO ALLA REGOLA

$$\begin{cases} x_0 \geq 0 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} & k \geq 0 \end{cases}$$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sotto opportune ipotesi $x_k \to \sqrt{a}$

ovviamente non possiamo calcolare tutti i termini della successione, e quindi ci fermiamo ad un certo punto.

(2) SCRIVERE UN PROGRAMMA MATLAB CHE DATO n e x_0 CALCOLA I PRIMI N TERMINI DELLA SUCCESSIONE