Lezione 16/03 Prova 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \epsilon_m = \frac{f'(x)}{f(x)} x \, \epsilon_x \quad |\epsilon_x| \le u$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \epsilon_m = \frac{1}{f(x)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i \, \epsilon_i \right)$

x vett

ϵ_m misura il condizionamento

$\epsilon_m = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$

Misura quanto varia il valore di $f(x)$ se considero un errore $\tilde{x}$ vicino ad x

Problema risoluzione $Ax = b$

INPUT A, b $\quad$ OUTPUT x

$A \rightsquigarrow \tilde{A} \quad b \rightsquigarrow \tilde{b}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix} \quad \tilde{a} = a(1+\epsilon_a)$

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} \quad \tilde{b}_1 = b_1(1+\epsilon_1) \ldots$

Condizionamento: di quanto cambia x al variare di A e b vicino ai dati di ingresso

Confrontare le vicinanze tra vettori e matrici. $\to$ Norma

Norma vettoriale : $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che soddisfa:

(1) $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0 \iff x = 0$

(2) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(3) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Esempio. (1) $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\rightsquigarrow$ lunghezza del vettore

$f(x) = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$ è una norma

Dimostrare che è una norma: provare le proprietà 1) 2) e 3)

(1) $f(x) = \max_{i=1 \dots n} |x_i| \geq 0$ OK

$\max_{i=1 \dots n} |x_i| = 0 \iff \forall i \ |x_i| = 0 \iff x_i = 0$

(2) $f(\alpha x) = \max_{i=1 \dots n} |\alpha x_i| = \max_{i=1 \dots n} |\alpha| |x_i| = |\alpha| \max_{1 \dots n} |x_i|$

$= |\alpha| f(x)$

(3) $f(x+y) = \max_{1..n} |x_i + y_i| \leq \max_{1..n} |x_i| + |y_i|$

$\leq \max_{1..n} |x_i| + \max_{1..n} |y_i| = f(x) + f(y)$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (DIMOSTRARE CHE È UNA NORMA)

NOTAZIONE $f(x) = \|x\|$

$f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2$ NORMA EUCLIDEA o NORMA 2

$f(x) = \max_{i=1..n} |x_i| = \|x\|_\infty$ NORMA INFINITO

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$ NORMA 1

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f norma $\Rightarrow$ distanza

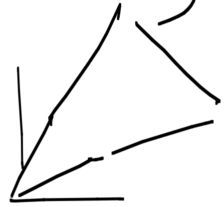
$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = f(x-y)$

$\| \, \|_2 \to$ distanza euclidea

$\| \, \|_1 \to$ distanza 1 $\quad \| \, \|_\infty \to$ distanza infinito

① $\text{dist}(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ e $\text{dist}(x,y) = 0 \iff x = y$

② $\text{dist}(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, \text{dist}(x,y)$



③

Se considero norme differenti $\Rightarrow$ distanze differenti

$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\text{dist}_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_1 = 1+2 = 3$

$\text{dist}_2(x,y) = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\text{dist}_\infty(x,y) = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2$

EQUIVALENZA TOPOLOGICA DELLE NORME!

QUALITATIVAMENTE POSSO SCEGLIERE UNA QUALSIASI TRA QUESTE

x, y vicini (dist ≈ 0) in una norma sono vicini anche in un'altra norma

x, y lontani (dist grande) in una norma sono lontani anche in un'altra norma.

$\|x-y\|_2 = 10^8 \qquad \|x-y\|_1 = 1.5 \cdot 10^7$

$\dots\ 10^{-8} \qquad \dots = 2.3 \cdot 10^{-6}$

Norme vettoriali $\to$ norme matriciali (distanza tra matrici)

$f: \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ norma matriciale se soddisfa:

1. $f(A) \geq 0$ e $f(A) = 0 \iff A = 0$
2. $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$
3. $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$
4. $f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$

Costruire norme matriciali.

① Partire da una norma vettoriale $\longrightarrow$ norma matriciale indotta (compatibile) dalla norma vettoriale

$f_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ norma vettoriale

ⓐ $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : f_V(x) = 1 \}$ chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ compatto

ⓑ $x \rightsquigarrow f_V(x)$ continua

Idea: fissata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiamo

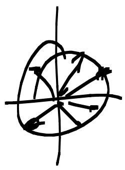
$$\boxed{f_M(A) = \max_{x \in S} f_V(Ax)}$$

$x \rightsquigarrow f_V(Ax)$ continua

Weierstrass: funzione continua su un compatto ammette massimo $\rightsquigarrow f_M(A)$

Esempio: $\| \ \|_2$ $n=2$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$



Compatto

$$f_M : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$$

$$f_M(A) = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

- determinare i vettori in S (infiniti)
- determinare i vettori $y = Ax$ (infiniti)
- calcolare le norme $\| \; \|_2$
- prendere il max

Non È OPERATIVA (non mi permette il calcolo della norma)

NOTAZIONE

$\underline{f_M = f_V}$

$\|v\|_2$	$\|A\|_2$
$\|v\|_\infty$	$\|A\|_\infty$
$\|v\|_1$	$\|A\|_1$

Come si calcola (NON CON LA DEFINIZIONE)

Teoremi che caratterizzano questa quantità

Teorema (1) $\|A\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Teorema (2) $\|A\|_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Teorema (3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

dove $\rho(B) = \max_{i=1\dots n} |\lambda_i|$ $\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori di B

è detto raggio spettrale di B

(1) $A^T A$ (2) calcolo gli autovalori (3) prendere il più grande

DIFFICILE

Esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$\|A\|_\infty = \max\{10, 9, 8, 15\} = 15$

$\|A\|_1 = \max\{13, 5, 12, 5\} = 13$

$\|A\|_2 =$ RIFIUTO

$\underline{A^T \cdot A}$ ⇝ calcolare gli autovalori di una matrice 4×4

... praticamente assurdo

PERCHÉ CI INTERESSANO NORME MATRICIALI INDOTTE?

SODDISFANO UNA PROPRIETÀ AGGIUNTIVA

TEOREMA: Sia $f_V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ norma vettoriale e f_M la norma indotta associata alla f_V. Allora

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$f_V(Ax) \leq f_M(A)\, f_V(x)$$

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$$

Dim: $x = 0$ $\quad \|A \cdot x\| = \|A \cdot 0\| = \|0\| = 0$

$\|A\| \|x\| = \|A\| \cdot 0 = 0$ OK

$x \neq 0$

$$\|Ax\| = \left\| A \cdot \frac{x}{\|x\|} \|x\| \right\| \quad (\|x\| \neq 0)$$

$$2^\circ = \|x\| \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|x\| \|A\|$$

$\in S$

CONDIZIONAMENTO DELLA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$Ax = b$ $\quad$ (A invertibile)

$A \hat{x} = \hat{b}$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} b_1(1+\varepsilon_1) \\ \vdots \\ b_n(1+\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1\varepsilon_1 \\ \vdots \\ b_n\varepsilon_n \end{bmatrix}}_{f}$$

$b + f$

$\hat{x}$ soluzione esatta del sistema perturbato.

Condizionamento $\rightarrow$ studiamo quanto $\hat{x}$ differisce da x

$$E_m = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \quad (\text{distanza relativa})$$

- $\|\hat{x} - x\| = \|A^{-1}\hat{b} - A^{-1}b\| = \|A^{-1}(b+f) - A^{-1}b\|$

$$= \|A^{-1}f\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{norma matriciale indotta}} \|f\|$$

- $Ax = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$

$$\Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|} \quad (\|A\| \neq 0 \text{ A invertibile})$$

$$E_m = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\,\|f\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

$$\leq \|A^{-1}\|\,\|A\| \frac{\|f\|}{\|b\|} = \|A^{-1}\|\,\|A\| \frac{\|\hat{b} - b\|}{\|b\|}$$

coefficiente di amplificazione $= \|A\|\,\|A^{-1}\|$

numero di condizionamento della matrice o numero di condizionamento della risoluzione del sistema lineare $Ax=b$

Coefficiente è grande il problema è mal condizionato

è piccolo il problema è ben condizionato

Oss $\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$

$\|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\|$ (4 proprietà norma naturale)

$= \|I\| = 1$

Esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$ $(\epsilon \geq 0)$

= Condizionamento in $\| \cdot \|_\infty$ per $\epsilon = 2$

= Condizionamento in $\| \cdot \|_\infty$ per $\epsilon \to 0^+$

$\epsilon = 2$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\|A\|_\infty = 2 \qquad \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ z - x = 0 \\ y + w = 0 \\ w - y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2} \qquad w = \frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(Matrice dei cofattori / det A)

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 \qquad K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2$$

<u>il sistema è ben condizionato</u>

$$\epsilon \to 0^+ \qquad \|A\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (0 < \epsilon \leq 1)$$

$$\max \{2, 1 + 1 - \epsilon\} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ (1-\epsilon)x + z = 0 \\ y + w = 0 \\ (1-\epsilon)y + w = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x - (1-\epsilon)x = 1 \\ & x - x + \epsilon x = 1 \end{aligned} \qquad x = \frac{1}{\epsilon} \quad z = 1 - \frac{1}{\epsilon}$$

$$(1-\epsilon)y - y = 1$$

$$-\epsilon y = 1 \qquad y = -\frac{1}{\epsilon} \qquad w = \frac{1}{\epsilon}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1-\frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{ \frac{2}{\epsilon} , \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} - 1 \right\} = \frac{2}{\epsilon}$$

$$K_\infty(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \frac{4}{\epsilon} = 2 \cdot \frac{2}{\epsilon}$$

Il sistema diviene mal condizionato per $\epsilon \to 0^+$

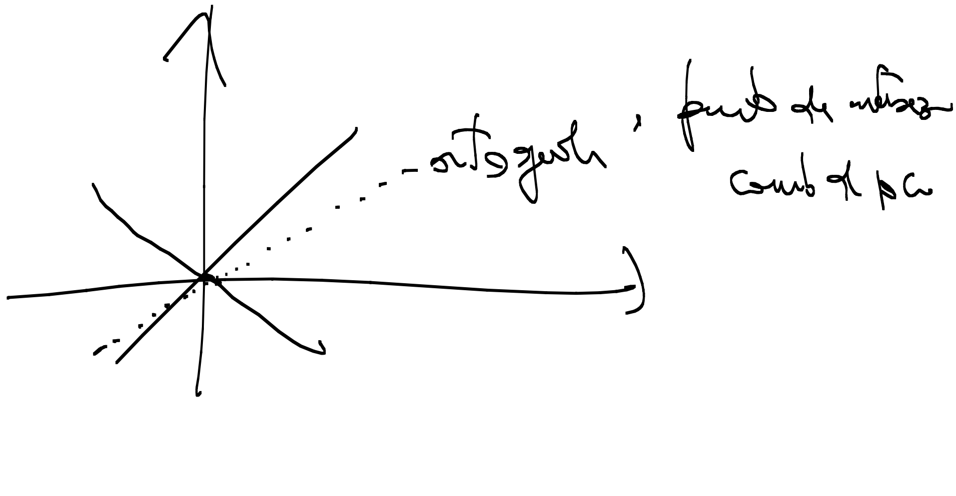
Esercizio: Eseguire lo stesso analisi in norma $\| \, \|_2$

(risultato equivalente tranne che ϵ) mal condizionamento quando $\epsilon \to 0$)

$$\epsilon = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = b \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

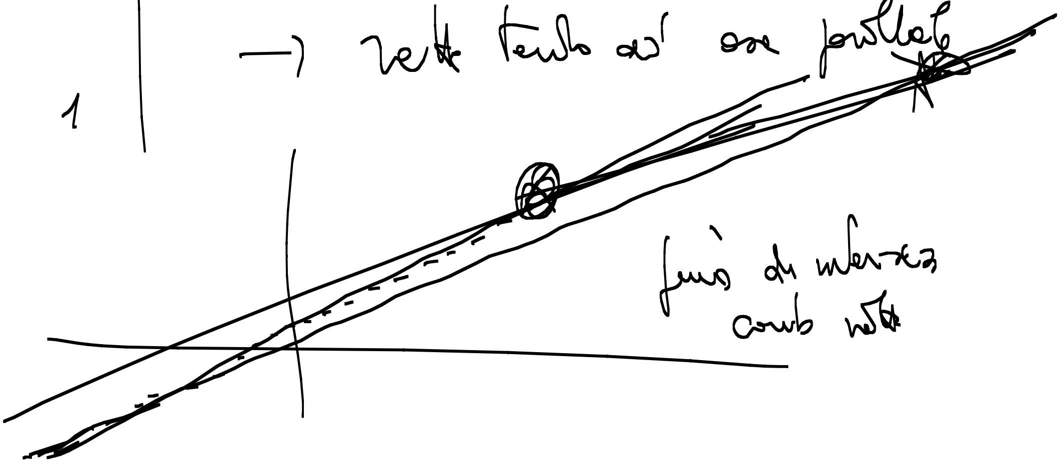
$$\begin{cases} x + y = b_1 \\ -x + y = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + b_1 \\ y = x + b_2 \end{cases}$$

Risolvere il sistema lineare significa trovare il punto di intersezione fra queste 2 rette.



$\epsilon \to 0^+$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{rette tende ad esser parallele}$$



END