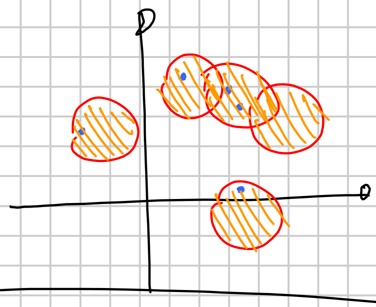
Note Title 2020-03-24

Teorema (Gershgorin) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$K_i = \Big\{ |z - a_{ii}| \le \sum_{i\ne j} |a_{ij}| \Big\}$$

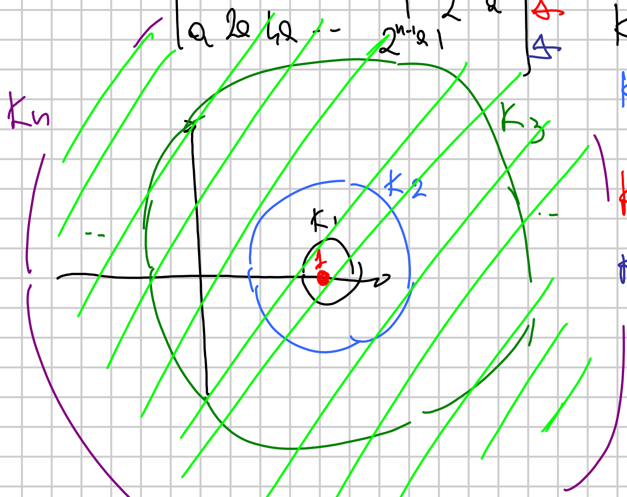
cerchio complesso centro a_{ii} raggio $\sum_{i \ne j} |a_{ij}|$

Gli autovalori di A appartengono a $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & a \\ & 1 & 0 & & 2a \\ & & 1 & & 4a \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 2^{n-1}a \\ a & 2a & 4a & \dots \; 2^{n-1}a & 1 \end{bmatrix}$$

es $n = 4$ $\begin{bmatrix} 1 & & & a \\ & 1 & & 2a \\ & & 1 & 4a \\ a & 2a & 4a & 1 \end{bmatrix}$



K_1 ha centro 1 e raggio $|a|$

K_2 ha centro 1 e raggio $|2a|$

⋮

K_{n-1} ha centro 1 e raggio $|2^{n-1}a|$

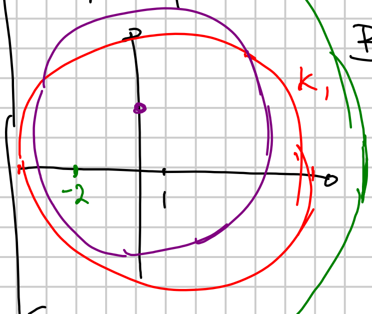
K_n ha centro 1 e raggio $|a| + |2a| + |4a| + \dots + |2^{n-1}a|$

Unione: $\bigcup_{i=1}^{n} K_i = K_n$

Il teo. di Gershgorin mi permette di concludere che gli autoval. di A stanno in K_n, cioè soddisfano

$$K_n = \{ |z-1| \le |a| + |2a| + |4a| + \dots + |2^{n-1}a| \}.$$

esempio più concreto...



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2i & 4+3i \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

K_1: centro 1 raggio 5

K_2: centro $2i$ raggio $|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

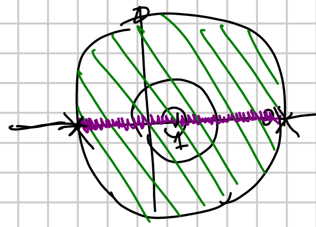
K_3: centro -2 raggio $|7| + |-1| = 8$

K'_1 = centro 1 raggio 7

K'_2: centro $2i$ raggio 3

K'_3: centro -2 raggio 8 $\quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2i & -1 \\ 3 & 4+3i & -2 \end{bmatrix}$

Torniamo all'esercizio..



Gli autovalori stanno all'interno $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

La matrice A^T ha gli stessi autovalori di A

Nel nostro caso, $A^T = A$, quindi i cerchi costruiti su A^T sono gli stessi di quelli costruiti su A

Però so che gli autovalori di A sono reali ($A = A^T$, teorema spettrale)

$\Rightarrow$ gli autovalori di A stanno tutti nel segmento

$$\left[1-|a|-|2a|-\dots-|2^{n-1}a| \, , \; 1+\underbrace{|a|+|2a|+\dots+|2^{n-1}a|}_{\text{posso scrivere questa somma in modo più compatto,}}\right]$$

Tutti i termini hanno lo stesso segno di A, quindi

$$|a|+|2a|+|4a|+\dots+|2^{n-1}a| = |a+2a+4a+\dots+2^{n-1}a|$$

disuguaglianza triangolare:
$|a+b| \le |a|+|b|$
$|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

perché

$$\begin{cases} a \geq 0 & a+2a+\dots+2^{n-1}a = a+2a+\dots+2^{n-1}a \\ a<0 & -a-2a\dots-2^{n-1}a = -a-2a-\dots-2^{n-1}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a(\underbrace{1+2+4+8+\dots+2^{n-1}}_{=2^n-1})| = |a(2^n-1)| = (2^n-1)|a|$$

(dalla formula per la somma di progr. geometrica)

$\Rightarrow$ Gli autovalori di A stanno in $[1-(2^n-1)|a|, 1+(2^n-1)|a|]$

Per quali valori di A posso dimostrare che la matrice è invertibile?

A invertibile $\Leftrightarrow$ 0 non è un autovalore di A.

$(\det A \neq 0 \qquad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$

Se dimostro che $0 \notin [1-(2^n-1)|a|, 1+(2^n-1)|a|]$, allora questo mi dimostra che 0 non è autovalore di A

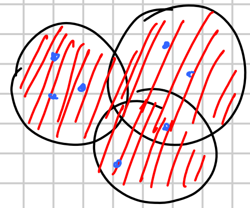
Se $1-(2^n-1)|a| > 0$, allora $0 \notin [1-(2^n-1)a, 1+(2^n-1)|a|]$ $\Rightarrow A$ invertibile

$$1 > (2^n-1)|a| \Leftrightarrow |a| < \frac{1}{2^n-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{2^n-1} < a < \frac{1}{2^n-1}$$

Se $-\frac{1}{2^n-1} < a < \frac{1}{2^n-1} \Rightarrow 0 \notin [1-(2^n-1)|a|, 1+(2^n-1)|a|] \Rightarrow 0$ non è autoval. di A
$\Rightarrow A$ invertibile

Se invece fosse $a > \frac{1}{2^n-1}$, posso concludere che A è singolare? No!

So che $0 \in$ cerchi di Gershgorin, ma questo non implica che è un autoval. di A



Soluzione di sistemi triangolari

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (\text{II}) \\ (\text{III}) \\ \leftarrow A_{44}x_4 = b_4 \end{matrix} \qquad x_4 = \frac{b_4}{A_{44}}$$

0 moltiplicaz.

$$(\text{III}) \quad A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = b_3 \qquad x_3 = \frac{b_3 - \overbrace{A_{34}x_4}^{S}}{A_{33}}$$

1 moltipl.

$$(\text{II}) \quad A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = b_2 \qquad x_2 = \frac{b_2 - \overbrace{A_{23}x_3 - A_{24}x_4}^{S}}{A_{22}}$$

2 moltipl.

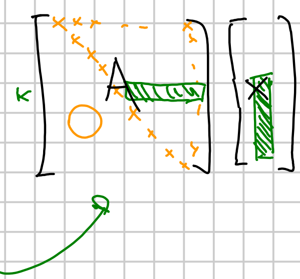
Su un sistema $n \times n$:

$$x_n = \frac{b_n}{A_{nn}} \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - A_{n-1,n}x_n}{A_{n-1,n-1}}, \ \dots \ \underbrace{x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} A_{kj}x_j}{A_{kk}}}_{}$$

per $k = n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$

$$S = A_{k,k+1}x_{k+1} + A_{k,k+2}x_{k+2} + \dots + A_{kn}x_n =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{k,k+1} & A_{k,k+2}, & \dots & A_{k,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



$$S = \overbrace{A(\underbrace{k, k+1:n}_{})}^{} \quad \underbrace{* \ X(k+1:n)}_{}$$

$*$: prodotto riga-per-colonna

$A(k, k+1:n)$: A, riga k, colonne dalla k+1 alla n.

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & 0 \\ & 1 & -2 & \\ & & \ddots & -2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & \\ & 1 & -2 & \\ & & 1 & -2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad T_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

È vero che in generale $T_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & & 8 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 4 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 2 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Mi basta controllare che

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & & & 0 \\ & 1 & -2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -2 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}}_{T_n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^{n-1} \\ & 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{T_n^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo l'elemento (i,j) dell'inversa: $\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{[0\,0 \cdots 0\,1\,-2\,0 \cdots 0]} \begin{bmatrix} \vdots \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j = \cdots$

$(k = j-i$, credo$)$

Se $i<j$ il prodotto fa $1 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 2^{k} = 0$ per qualche k

Se $i=j$ fa $1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$ $\quad \rightarrow$ il prodotto fa I

Se $i>j$ fa $1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

Questa è una dimostrazione che funziona per ogni n!

Costo computazionale di sup-solve:

il ciclo for più interno viene eseguito

$0+1+2+3+\ldots+(n-1)$ volte, cioè $\frac{(n-1)n}{2}$ volte $O(n^2)$

$\frac{n^2}{2}$ + ordine inferiore

Però, su

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & 0 \\ & 1 & -2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow k$$

$$x_k = \frac{b_k - \overset{-2}{A_{k,k+1}} x_{k+1} - \overset{0}{A_{k,k+2}} x_{k+2} - \ldots - \overset{0}{A_{kn}} X_n}{A_{kk}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- determinare formule
- risolvere
- scrivere programma che realizza queste formule