LEZIONE 30/03

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

PROBLEMA COMPUTAZIONALE:

Dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ determinare $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{Ax = b}$$

A matrice dei coefficienti, b termine noto

x vettore delle incognite.

ASSUNZIONE SUI DATI: $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow \exists!\, x : Ax = b \quad \boxed{x = A^{-1} b}$

1) A è una matrice diagonale

$A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \qquad \det A = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

A è invertibile $\Leftrightarrow d_i \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 x_1 = b_1 \Leftrightarrow x_1 = b_1/d_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ d_n x_n = b_n \Leftrightarrow x_n = b_n/d_n \end{cases}$$

```
for k=1:n
    x(k)= b(k)/a(k,k);
end.
```

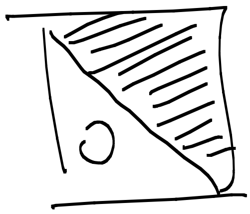
Costo computazionale $O(n)$ operazioni.

```
for k= n:-1:1
    x(k)= b(k)/a(k,k);
end
```

- A è triangolare...

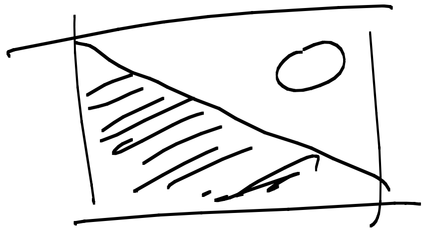
$A = (a_{ij})$ si dice TRIANGOLARE SUPERIORE

se $a_{ij} = 0$ per $i > j$



$A = (a_{ij})$ si dice TRIANGOLARE INFERIORE

se $a_{ij} = 0$ per $j > i$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

A è invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \cdots n$

$$Ax = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad a_{33}x_3 + \cdots a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

BACKWARD SUBSTITUTION: (SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO)

$$a_{kk}x_k + a_{k\,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

$$a_{kk}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$$

$$\boxed{x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \underline{\underline{\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}}\right) \qquad k = n:-1:1}$$

```
x(n) = b(n)/a(n,n);
for k = n-1: -1 : 1
        s = 0;
        for j = k+1: n
            s = s + a(k,j) * x(j);
        end
```

$x(k) = (b(k) - s)/a(k,k);$

end

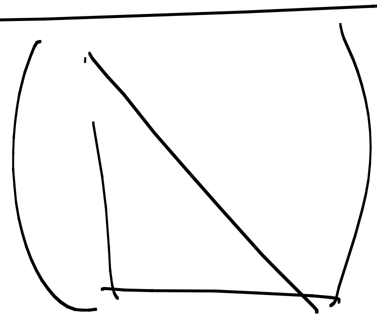
Costo computazionale:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \underline{(n-1)+(n-2)+\dots+1}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{(DIMOSTRARE X INDUZIONE)}$$

$$= \frac{n^2}{2} + O(n) \quad \text{op. moltiplicative}$$

$$= \underline{O(n^2)} \quad \text{op. moltiplicative}$$

$A =$  $= \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

FORWARD SUBSTITUTION (SOSTITUZIONE IN AVANTI)

→ IMPLEMENTAZIONE (ANALOGA)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ generale $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$Ax = b$$

TRASFORMARE IL SISTEMA LINEARE IN UN SISTEMA EQUIVALENTE CON MATRICE DEI COEFFICIENTI PIÙ SEMPLICE (AD ESEMPIO ~~DIAGONALE~~ O TRIANGOLARE)

- QUANDO A SI PUÒ FATTORIZZARE COME PRODOTTO DI MATRICI TRIANGOLARI

$$A = L \cdot U \qquad A \text{ invertibile} \Rightarrow L, U \text{ invertibili}$$

$$Ax = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Def: Sia $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: Diciamo che A è fattorizzabile LU o ammette LU se $\exists$ L matrice triangolare inferiore con elementi diagonali $=1$ e U triangolare superiore t.c.

$$A = L\cdot U$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ 0 & u_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0\\ u_2 = 1\\ l u_1 = 1\\ l u_2 + u_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \text{non esistono soluzioni}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ 0 & u_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} u_1 = 1\\ u_2 = 1\\ l u_1 = 1 \Rightarrow l = 1\\ l u_2 + u_3 = 1 \quad u_3 = 0\end{cases}$$

$\nexists!$ la fattorizzazione LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \underbrace{\det L}_{1} \cdot \det U = \det U = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \\ l u_1 = 0, \quad l u_2 + u_3 = 1 \end{cases}$$

$u_3 = 1 - l$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-l \end{pmatrix}$$

$\exists$ infinite fattorizzazioni LU

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e siano

$$A_k = A(1:k, 1:k), \quad 1 \le k \le n,$$

le sue sottomatrici principali di testa di ordine

$1, 2, \ldots n$.

Se $\det(A_k) \neq 0$ $\quad k = 1 \ldots n-1$

allora $\exists !$ fattorizzazione LU di A.

Dim: Induzione su n (dimensione di A)

$n = 1 \qquad A = [a]$

$$a = 1 \cdot x \iff x = a$$

$$a = 1 \cdot a$$

Ipotesi induttiva: Assumiamo il Teorema vero fino all'ordine $n-1$

se $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $B_1, \dots, B_{n-2}$ sono invertibili

allora $\exists!$ fattorizzazione LU di B

n: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & z \\ v^T & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & z \\ v^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & y \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} L_{n-1} U_{n-1} = A_{n-1} & \text{(fattorizzazione LU di } A_{n-1}) \\ L_{n-1}\, y = z \iff y = L_{n-1}^{-1} z \\ x^T U_{n-1} = v^T \iff x^T = v^T U_{n-1}^{-1} \\ x^T y + \beta = a \iff \beta = a - x^T y \end{cases}$$

$A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ per ipotesi del Teorema $A_1 \dots A_{n-2}$ sono invertibili $\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\Rightarrow \exists!$

fattorizz. LU di A_{n-1} $\quad A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$

$\det(A_{n-1}) = \det U_{n-1} \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ ed è univocamente determinata la fattorizzazione LU di A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_1 = [1] \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_3 = A$$

$$x^T = [x_1 \dots x_{n-1}] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ x_1 & \dots & \dots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(freccia)
arrow matrix
arrowhead matrix

① Provare che A ammette fattorizzazione LU

② In caso affermativo determinare tale fattorizzazione.

③ Determinare per quali valori di x la matrice è singolare:

④ Scrivere un programma Matlab per la soluzione di $Ax=b$ con costo lineare senza memorizzare esplicitamente la matrice.

① $A_n = \tilde{A}_1 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad A_k = I$ qualunque k

$k = 1 \ldots n-1$

$\Rightarrow \det A_k = 1 \neq 0 \quad k = 1 \ldots n-1$

$\Rightarrow \exists !$ fattorizzazione LU di A.

②

$$\left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline x_1 \ldots x_{n-1} & x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline v^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & z \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$$

$L_{n-1} U_{n-1} = I \Rightarrow L_{n-1} = I \quad U_{n-1} = I$

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \qquad v^T = [x_1 \dots x_{n-1}]$$

$$v^T z + \beta = x_n \iff \beta = x_n - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x_1 \dots x_{n-1} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right)$$

(3) $\det A = 0 \iff \det U = 0 \iff$

$$\beta = 0 \iff x_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$$

(4) $Az = b \iff L\underbrace{Uz}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Uz = y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ x_1 \dots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sostituzioni in avanti}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ & 0 & & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

sostituzione all'indietro

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_2 = b_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = b_{n-1} \\ x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} + y_n = b_n \end{cases}$$

```
y(1:n-1) = b(1:n-1);
s = 0;
for k = 1:n-1
    s = s + x(k) * y(k);
end
y(n) = b(n) - s
```

$O(n)$ operazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{n-1} \\ & & & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \beta = x_n - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

```
β = x_n ;
for k = 1 : n-1
    β = β - x(k) * x(k) ;        | O(n)
end
z(n) = y(n) / β ;
for k = n-1 : -1 : 1
    z(k) = y(k) - x(k) * z(n) ;  | O(n)
end
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

① Determinare se A ammette fatt LU ed in caso affermativo calcolarne la fattorizzazione

② Dire per quali valori di α, β la matrice è singolare.

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad k = 1 \dots n-1 \quad \Rightarrow \quad A_k \text{ è invertibile}$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ la fattorizzazione } \underline{LU}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \alpha \\ & \ddots & & -\alpha \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & \beta \end{array}\right)$$

$$L_{n-1} U_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_1 + z_2 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ \vdots \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -1 \quad z_3 = z_4 = \dots = z_n = 0$$

$$\cancel{\alpha} - \cancel{\alpha} + \beta = 1$$

$$\iff \beta = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & +\alpha \\ & \ddots & & -\alpha \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det(L \cdot U) = \det L \cdot \det U$$

$$= \underline{\det U} = 1$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la matrice è invertibile.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \alpha \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

Def: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ si dice predominante diagonale per righe.

se $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |a_{ij}| \quad i=1 \dots m$$

Def: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ si dice predominante diagonale per colonne.

se $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |a_{ji}| \quad i=1 \dots m$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$|3| > 2 = |1| + |-1|$

$|5| > |-1| + |-3| = 4$

$|3| > |-1| + |1| = 2$

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ predominante diagonale (per righe).

Allora A è invertibile.

Dim: Segue dal Teorema di Gerschgorin

Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ predominante diagonale per righe $\Rightarrow$

$0 \notin K_i \quad i=1,\dots,n \implies 0 \notin \bigcup K_i$

$\implies$ 0 non è autovalore di $A \implies A$ è invertibile.

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

$0 \notin K_i$? $\quad |0 - a_{ii}| = |a_{ii}| \overset{\text{p.d.r.}}{>} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}} |a_{ij}|$

$\implies 0 \notin K_i \quad \blacksquare$

Se A p.d. per colonne basta considerare i cerchi per colonne;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ p.d.r.} \implies A_k \text{ è p.d.r.} \implies \\ \exists! \text{ fattorizz. } LU \text{ di } A. \end{array}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & +1 & & 0 \\ +1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

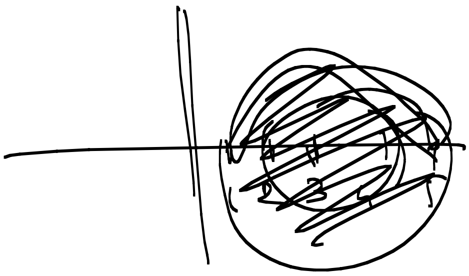
(1) A ammette fattorizzazione LU?

(1) A è d.d. $3 = |3| > |1| = 1 \quad i = 1, n$

$$3 = |3| > |1| + |1| = 2 \quad 2 \le i \le n-1$$

$\Rightarrow \exists!$ fattorizzazione LU di A

(2) Gershgorin $A_k = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$



$0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i \Rightarrow A_k$ è invertibile

$\Rightarrow$ Teorema di esistenza ed unicità $\exists!$ fattorizzazione LU

CALCOLO DELLA FATTORIZZAZIONE PIÙ COMPLICATO

(ALGORITMO THOMAS)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Matrice tridiagonale.

Supponiamo che ammetta fattorizzazione LU

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & z_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & z_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

$u_1 = \alpha_1 \quad z_1 = \gamma_1$

$l_1 u_1 = \beta_1 \iff l_1 = \beta_1 / u_1$

$l_1 z_1 + u_2 = \alpha_2 \implies u_2 = \alpha_2 - l_1 z_1 \quad z_2 = \gamma_2$

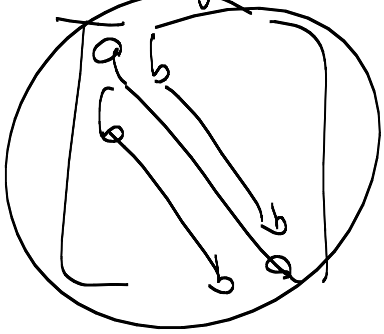
```
u(1) = α(1);
for k = 2 : n
  z(k-1) = γ(k-1);
  l(k-1) = β(k-1)/u(k-1)
```

$$u(k) = d(k) - l(k-1) * z(k-1);$$

end

$O(n)$ operazioni aritmetiche

Esercizio: Implementare in MatLab l'algoritmo di Thomas applicato a matrici triangolari del tipo



INPUT: (a, b, n)

Output l, u e z (soluzione)

- Verificare numericamente la correttezza dell'algoritmo di Thomas