Utilizzando il comando triu (ones(n)), potete generare una matrice triangolare superiore con tutte le entrate nel triangolo uguali a 1:

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Scrivete una function x = risolvi_sistema (b) che, dato in input un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, calcola la soluzione del sistema lineare $U_n x = b$. Sapreste scrivere questa funzione in modo che abbia costo computazionale $\mathcal{O}(n)$?

Esercizio

Sapreste dimostrare che la seguente matrice $n \times n$ ammette fattorizzazione LU per ogni $n \in \mathbb{N}$?

$$A_n = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} n-1 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

$$
A^{(i,j)} = \begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j-1} & A_{1,j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\
A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j} & A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \cdots & A_{i-1,j-1} & A_{i-1,j} & A_{i-1,j+1} & \cdots & A_{i-1,n} \\
A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j-1} & A_{i,j} & A_{i,j+1} & \cdots & A_{i,n} \\
A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \cdots & A_{i+1,j-1} & A_{i+1,j} & A_{i+1,j+1} & \cdots & A_{i+1,n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j-1} & A_{n,j} & A_{n,j+1} & \cdots & A_{n,n}
\end{bmatrix}
$$

Esercizio (corretto)

Scrivere una function `d = determinante(A, i)` che calcola il determinante di una matrice quadrata A con la formula di Laplace sulla i-esima riga

$$\det A = (-1)^{i+1} A_{i,1} \det A^{(i,1)} + \cdots + (-1)^{i+n} A_{i,n} \det A^{(i,n)}.$$