lezione 20/04

≡ Eliminazione Gaussiana con pivoting

≡ Pivoting migliora stabilità ma peggiora fill-in.

≡ Strategie per ridurre ordine: metodi iterativi

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile.

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$\exists\, a_{j1}^{(0)} \neq 0$ Prendo j: $\left|a_{j1}^{(0)}\right| = \max_{k=1,\dots,n} \left|a_{k1}^{(0)}\right|$

Scambio riga j con riga 1

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} a_{j1}^{(0)} & \cdots & a_{jn}^{(0)} \\ & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \end{bmatrix}$$

P_1 matrice ottenuta dall'identità scambiando colonna 1 e j

P_2 matrice di permutazione (ricordo: $P^{-1} = P^T$)

$$A^{(1/2)} = P_1 A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = E_1 P_1 A^{(0)}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & \\ \vdots & a_{22}^{(1)} \cdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \end{bmatrix}$$

$\exists\, j \geq 2$ t.c. $a_{j2}^{(1)} \neq 0$

(altrimenti 1 e 2 colonne linearmente dipendenti $\Rightarrow$ A singolare)

Determino $\left|a^{(1)}_{J2}\right| = \max_{k=2..n} \left|a^{(1)}_{k2}\right|$

Scambio 2 e J-esima riga ....

Il processo diviene:

$$E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 P_1 A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = \underbrace{P_1^T E_1^{-1} \cdots P_{n-1}^T E_{n-1}^{-1}}_{L} U$$

$$A^{(0)} = L \cdot U$$

L non è triangolare

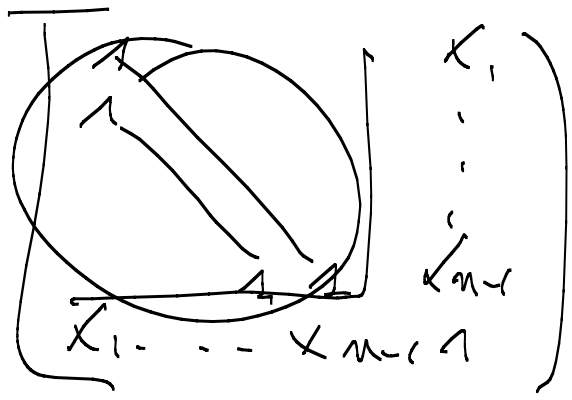
("psicologicamente triangolare" MATLAB)

$[L, U] = lu(A) \,/\, x = A \backslash b$

pivoting

(partial pivoting)

1. rende il processo applicabile ad ogni matrice invertibile
2. migliora la stabilità
3. non cambia il costo computazionale
4. può aumentare il fill-in.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & x_1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

L, U sparse.

no così pivoting

U si riempie.

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1+\epsilon & -\epsilon \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = A \backslash b$ OK

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1+\epsilon)}{\epsilon} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = E \cdot A \qquad b = E \cdot b$$

$x_2 = U \backslash b$ NO

Metodi Iterativi

$Ax = b$ A inevitabile A sparsa

A sparsa = molti elementi sono nulli

$$A = \begin{bmatrix} x & & & x \\ x & & & \\ \vdots & & & \\ x & & & n \end{bmatrix}$$

$nnz(A) < cn^2$

$nnz(A) = O(n)$

$O(n \log n)$

$O(n \cdot \sqrt{n})$

Metodo di eliminazione gaussiana e metodo diretto

= numero finito di passi determini la soluzione del sistema.

Metodi iterativi: costruiamo una successione

$\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di vettori tali che $x^{(k)} \to x$

soluzione del sistema lineare.

Criterio di arresto: quando mi accontento.

$$\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

Def: $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\quad \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$

$$\iff \lim_{k\to+\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

Qualsiasi norma ok (EQUIVALENZA TOPOLOGICA)

$$\| x^{(k)} - x \|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} | x_j^{(k)} - x_j | \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

$$| x_j^{(k)} - x_j | \xrightarrow{k \to +\infty} 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$0 \le | x_j^{(k)} - x_j | \le \max_{j=1,\dots,n} | x_j^{(k)} - x_j |$$

$Ax = b \qquad A = M - N$

M inversible.

$$Ax = b \iff (M - N)x = b$$

$$\iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\iff x = Px + q$$

$$P = M^{-1} N \qquad q = M^{-1} b$$

$$Ax = b \iff \begin{cases} x = Px + q \\ P = M^{-1}N \quad q = M^{-1}b \\ A = M - N \end{cases}$$

$$x = Px + q \rightsquigarrow \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \end{cases}$$

Teorema: Se $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \in \mathbb{R}^n$

allora $x = Px + q$

(questo è la chiave del nostro lavoro)

Dim: $x^{(k)} \to x$ (1 pass.)

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + g \quad \text{(1 pass.)}$$

$$x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to+\infty} Px^{(k)} + g$$

$$= Px + g$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax = b \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

① $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A = M - N \qquad M$ invertibile

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \cancel{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Successione generata $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

dipende dalla scelta del vettore iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

Ok convergência.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = (-1)^{(k)} \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$x^{(k)}$ diverge (não converge)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1} N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$x^{(k)} \to 0$ soluzione.

Convergenza in generale dipende da come sono scelte M e N ($A = M - N$)

e dalla soluzione del sistema lineare

~~FINO QUA~~

Convergenza

Def: Un metodo iterativo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$ $(k \geq 0)$ per risolvere $Ax = b$ con $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ $q \in \mathbb{R}^N$ $A = M - N$, si dice CONVERGENTE se

$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{k} x^{(k)} = x$ soluzione del sistema

cioè la successione generata a partire dalla soluzione del sistema lineare

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$$ metodo iterativo

$$x = Px + q$$ soluzione del sistema

$$x^{(k+1)} - x = P\left(x^{(k)} - x\right)$$

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

$$e^{(k+1)} = P e^{(k)} \qquad k \geq 0$$

Teorema: Il metodo $x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g$ è convergente se e solo se $\|\cdot\|$ è una norma tale che $\|P\| < 1$

Dim: $e^{(k+1)} = P e^{(k)} \Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = \|P e^{(k)}\|$

$$\leq \|P\| \, \|e^{(k)}\| \leq \|P\|^2 \|e^{(k-1)}\| \leq \dots$$

$$\leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|$$

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\| \leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|$$

$\downarrow 0$ $\qquad \downarrow 0$ $\qquad \downarrow 0$

Teorema dei carabinieri. $\square$

Teorema: Se il metodo $x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$ è convergente allora $\rho(P) < 1$

Dim: Se è convergente lo facciamo andare $\forall x^{(0)}$ e quindi $e^{(k)} \to 0 \quad \forall e^{(0)}$

Prendiamo $e^{(0)} = v \neq 0$ tale che $Pv = \lambda v$ con $|\lambda| = \rho(P)$

$$e^{(k+1)} = Pe^{(k)} = \dots = P^{k+1} e^{(0)}$$

$$= \lambda^{k+1} v = \lambda^{k+1} e^{(0)}$$

$$\Rightarrow \|e^{(k+1)}\| = |\lambda|^{k+1} \|e^{(0)}\| \neq 0$$

$$\|e^{(k+1)}\| \to 0 \iff |\lambda| < 1$$

Teorema: Se $\rho(P) < 1$ allora il metodo

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q$$ è convergente.

Dim: (solo se matrici diagonalizzabili)

$$P = V D V^{-1}$$

$$P^{k+1} = V D^{k+1} V^{-1}$$

$$\| P^{k+1} \|_2 \leq \| V \|_2 \| V^{-1} \|_2 \rho(P)^{k+1}$$

$$0 \leftrightarrow 0 \leq \| e^{(k+1)} \|_2 \leq \| P^{k+1} \|_2 \| e^{(0)} \|_2$$

$$\leq \| V \|_2 \| V^{-1} \|_2 \rho(P)^{k+1} \| e^{(0)} \|_2$$

$$\downarrow 0$$

□

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente x la

Convergenza è che $\varphi(P) < 1$.