Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$.*

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\left\{\begin{array}{rrrrrr} 3x & +y & -z & -2u & -v & =0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & =0 \end{array}\right.$ e di quello a $\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & +y & +z & +u & +v & =0 \\ x & -y & +z & -u & +v & =0 \end{array}\right.$ (cfr. Esercizio 2).

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} 3x & +y & -z & -2u & -v & =0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & =0 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rrrrrr} x & +y & +z & +u & +v & =0 \\ x & -y & +z & -u & +v & =0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & =0 \end{array}\right.$$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \dots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \dots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\left\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N}, \ a \in \mathbf{C}\right\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Notazione: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme, $v \in V$ e $k \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{A} + v = \{u \in V : \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = \alpha + v\}, \quad r\mathcal{A} = \{u \in V : \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = r\alpha\}.$$

Esercizio 1. (cfr. Domanda 1 del secondo foglio di esercizi)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ suoi sottospazi vettoriali. Si mostri

$$v \notin \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff (\mathcal{A} + v) \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W : W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

$$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v \rangle = \langle v \cdot u \rangle$, $\langle u + rw \cdot v \rangle = \langle u \cdot v \rangle + r\langle w \cdot v \rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \langle v \cdot \alpha \rangle = 0\}.$$

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.