CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2019/2020 – Correzione Appello 30/06/2020

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Dal teorema di Gerschgorin si ha che $1/3 \le \lambda \le 1$. Segue $\mathcal{K}_2(A) = \lambda_{max}/\lambda_{min} \le 3$.
2. La convergenza segue dalla predominanza diagonale. Dal teorema di Gerschgorin applicato alla matrice di iterazione segue che $\| J \|_2 \le 1/2$. Si ha pertanto che $\| \boldsymbol{e}^{(k)} \|_2 \le \| J \|_2^k \| \boldsymbol{e}^{(0)} \|_2$ da cui $\| \boldsymbol{e}^{(k)} \|_2 \le 2^{-k} \| \boldsymbol{e}^{(0)} \|_2$ che implica $k = 48$.
3. Il metodo di Jacobi richiede $O(n)$ operazioni per passo.

Esercizio 2

1. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 10+5(1-x)^4 > 0$ $\forall x$, e $f''(x) = -20(1-x)^3$. Si ha $f''(x) \ge 0 \iff x \ge 1$. Segue che $f(x)$ è monotona crescente con $f(0) = -1$ e $f(1) = 10$ e quindi dal teorema di esistenza degli zeri $\exists!\alpha$ con $f(\alpha) = 0$ e $\alpha \in [0, 1]$.
2. Si ha $|g'(x)| = (1-x)^4/2$ da cui $|g'(x)| < 1 \iff 1 - 2^{1/4} < x < 1 + 2^{1/4}$. Posto $\rho = \alpha$ segue che $[\alpha-\rho, \alpha+\rho] = [0, 2\alpha] \subset [1-2^{1/4}, 1+2^{1/4}]$ e quindi la converge della successione ad α segue dal teorema del punto fisso.
3. La convergenza della successione ad α segue dal teorema di convergenza in grande.