Lezione 2 8.10.2020

1. Estensione ad uno spazio a n dimensioni di quanto fatto nello spazio ordinario.

- Si fissa un punto O
- si fissano n rette perpendicolari a 2 a 2 per O
- su ~~un~~ ogni retta r_i si fissa un punto U_i $i = 1, \dots, n$, in ~~modo~~ modo che i segmenti $\overline{U_i O}$ siano tutti uguali.
- A questo punto ogni X dello spazio è vertice opposto a O di un parallelepipedo rettangolo con i lati paralleli agli assi $r_1, \dots, r_n$ e si può scrivere

$$X - O = x_1 U_1 - O + x_2 U_2 - O + \dots + x_n (U_n - O)$$

- Se chiamiamo VETTORI i segmenti orientati con O come primo estremo possiamo scrivere

$$v = X - O = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

dove $e_i = U_i - O$.

Lo spazio è diventato $\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

La definizione è la stessa:

$$\langle v, w \rangle = \text{lungh. } v \cdot \text{lungh. } w \cdot \cos\alpha$$

Ma possiamo definire la proiezione ortogonale sulla retta di w: per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ c'è un unico iperpiano passante per X e ortogonale a w. La proiezione di X è l'intersezione tra l'iperpiano e la retta di w.

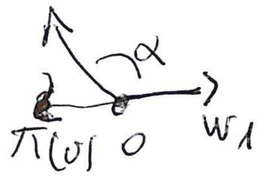
La proiezione rispetta la somma di vettori e la moltiplicazione di vettore per numeri reali. Se chiamiamo $\pi : \mathbb{R}^n \to r$ la proiezione ortogonale sulla retta r si ha

$$\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) + \pi(v_2)$$

$$\pi(a v) = a\, \pi(v).$$

Ora ripetiamo la prova fatta per il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.

Poniamo $w_1 = \dfrac{1}{\text{lungh}\, w}\, w$. w_1 è un vettore di lunghezza 1 e la proiezione di v sulla retta di w_1 (che è la stessa della retta di w) è un multiplo di w_1. Questo multiplo è ~~±~~ la



lunghezza di $\pi(v)$ con il segno $+$ se è dalla stessa parte di w_1, con il segno $-$ se è dalla parte opposta, cioè se $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ma allora

$$\pi(v) = (\text{lungh}\, v \cdot \cos\alpha)\, w_1 =$$

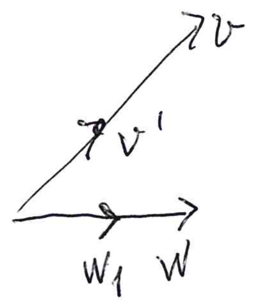
$$\langle v, w_1 \rangle\, w_1 .$$

Ora se $v = v_1 + v_2$ $\quad \pi(v) = \pi(v_1) + \pi(v_2)$

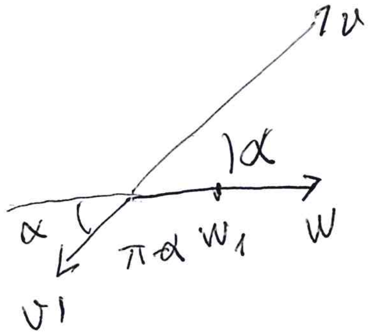
Per la formula precedente

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle$$

Se $v = a v'$ la sua lunghezza è $|a|$ volte la lunghezza di v'. Se a è positivo l'angolo tra v' e w è lo stesso di quello tra v e w. Se $a < 0$



$a > 0$



$a < 0$

Poiché $\pi(v') = a\,\pi(v)$, la lunghezza di $\pi(v')$ è sempre $|a|$ lunghezza di v e il segno di a ci dice se v'_1 è equiorientato con v o no.

Quindi $\pi(v')w_1 = \langle v', w_1\rangle w_1 =$

$$= a\,\pi(v)w_1 = \underline{a\langle v, w_1\rangle w_1} =$$

$$= \underline{\langle a v, w_1\rangle}$$

Dunque $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- è commutativo
- nella prima variabile rispetto somma e prodotto per un numero reale
- quindi anche nella seconda variabile

Allora scriviamo

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

e quindi

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} \langle x_i e_i , y_j e_j \rangle =$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Quindi se considero un'equazione di grado 1 senza termine noto

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

sto prendendo tutti gli $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ che sono ortogonali al vettore $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

dunque l'equazione rappresenta l'iperpiano per O ortogonale alla retta per O che contiene il vettore $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e le equazioni

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d = 0$$

al variare di d sono tutti gli iperpiani paralleli.

DIPENDENZA e INDIPENDENZA LINEARE

Prendiamo k vettori in $\mathbb{R}^n$

$v_1, \ldots, v_k$

diciamo che $v_1 \ldots v_k$ sono DIPENDENTI se $\exists$ numeri reali $a_1, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ è il vettore nullo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Sono INDIPENDENTI se comunque si prendono $a_1, \ldots, a_k$

se $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = 0 \underset{\text{allora}}{\Longrightarrow} a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$

$v_1, v_2, v_1 + v_2$ sono dipendenti

$1 \cdot v_1 + 1 v_2 + (-1)(v_1 + v_2) = 0$

$e_1, \ldots, e_n$ sono indipendenti

se $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = 0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$

$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sistemi lineari

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione

$$ax = b$$

Quali sono le soluzioni? ci sono sempre? Ce ne è solo una?

- $a \neq 0 \Rightarrow \forall b \quad x = \dfrac{b}{a}$ è l'unica soluzione
- $a = 0$, b:
  - $b \neq 0$ nessuna soluzione
  - $b = 0$ ogni numero reale è soluzione.

Già in questo caso semplice ci sono varie possibilità

Un sistema lineare di p equazioni in q incognite è

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = b_q \end{cases}$$

7

Si cercano $S = \{X \in \mathbb{R}^q$ soluzioni del sistema$\}$

Una soluzione è $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ tale che la

q-upla $(x_1 - x_q)$ verifica tutte le p equazioni. Come si trova S.

Se volete S è l'intersezione in $\mathbb{R}^q$ di p iperpiani.

Per semplificare possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pq} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_p \end{pmatrix}$$

e allora il sistema diventa

$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q = B$$

$A^1, -, A^q$ sono le COLONNE di A

$A_1 \dots A_p$ sono le RIGHE

Ci viene subito: $S \neq \phi \Longleftrightarrow B$ è combinazione lineare delle colonne di A

Ma questo non ci aiuta.

La strategia è modificare le equazioni, senza cambiare l'insieme delle soluzioni. Ovvero cambiare gli iperpiani senza cambiare l'intersezione cercando equazioni di forma più semplice.

Mosse di Gauss

1) scambiare l'ordine delle righe
2) sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga. Invece di riga avrei dovuto scrivere EQUAZIONE

La prima mossa scrive le stesse equazioni in un ordine diverso. Palesemente S non cambia.

La seconda mossa fa questo lavoro

il sistema prima

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ = b_1 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jq}x_q = b_j \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{iq}x_q = b_q \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ = b_p \end{cases}$$

il sistema poi

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ = b_1 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jq}x_q = b_j \\ (a_{i1}+ka_{j1})x_1 + \dots (a_{iq}+ka_{jq})x_q = b_i + kb_j \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

più in grande quello che cambia

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jq}x_q = b_q$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iq}x_q &+ \\ + ka_{j1}x_1 \qquad + ka_{jq}x_q &= b_i + kb_q \end{aligned}$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ verifico l'equazione j e l'equazione j soddisfa anche l'equazione i + k volte l'equazione j

Se X soddisfa il sistema nuovo, dobbiamo solo assicurarci che X soddisfi l'equazione i

Ma $a_{j1}x_1 + \qquad + a_{jq}x_q = b_q$ perché X soddisfa l'equazione j. Moltiplichiamo per k

$$ka_{j1}x_1 + \qquad + ka_{jq}x_q = kb_q$$

Ma X soddisfa ~~la~~ l'equazione i + k volte l'equazione j quindi deve soddisfare anche l'equazione i.

Ora usiamo le mosse di Gauss per portare il sistema ad un sistema a scala. Lavoriamo solo sui coefficienti.

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix}$$

Se $a_{11} \neq 0$ facciamo le seguenti mosse

- sostituiamo A_2 con $A_2 - a_{11}^{-1} a_{21} A_1$
- " A_3 con $A_3 - a_{11}^{-1} a_{31} A_1$
- $\vdots$
- sostituiamo A_p con $A_p - a_{11}^{-1} a_{p1} A_1$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

e ricominciamo con B

se $a_{11}=0$, ma c'è un $a_{i1}\neq 0$ scambiamo l'ordine portando la riga A_i al primo posto.

Se la prima colonna è fatta di zeri passiamo alla seconda colonna.

<u>Osservazione</u> Se la matrice ha una colonna di zeri, vuol dire che nel sistema non compare una variabile, diciamo x_k. Vuol dire che se

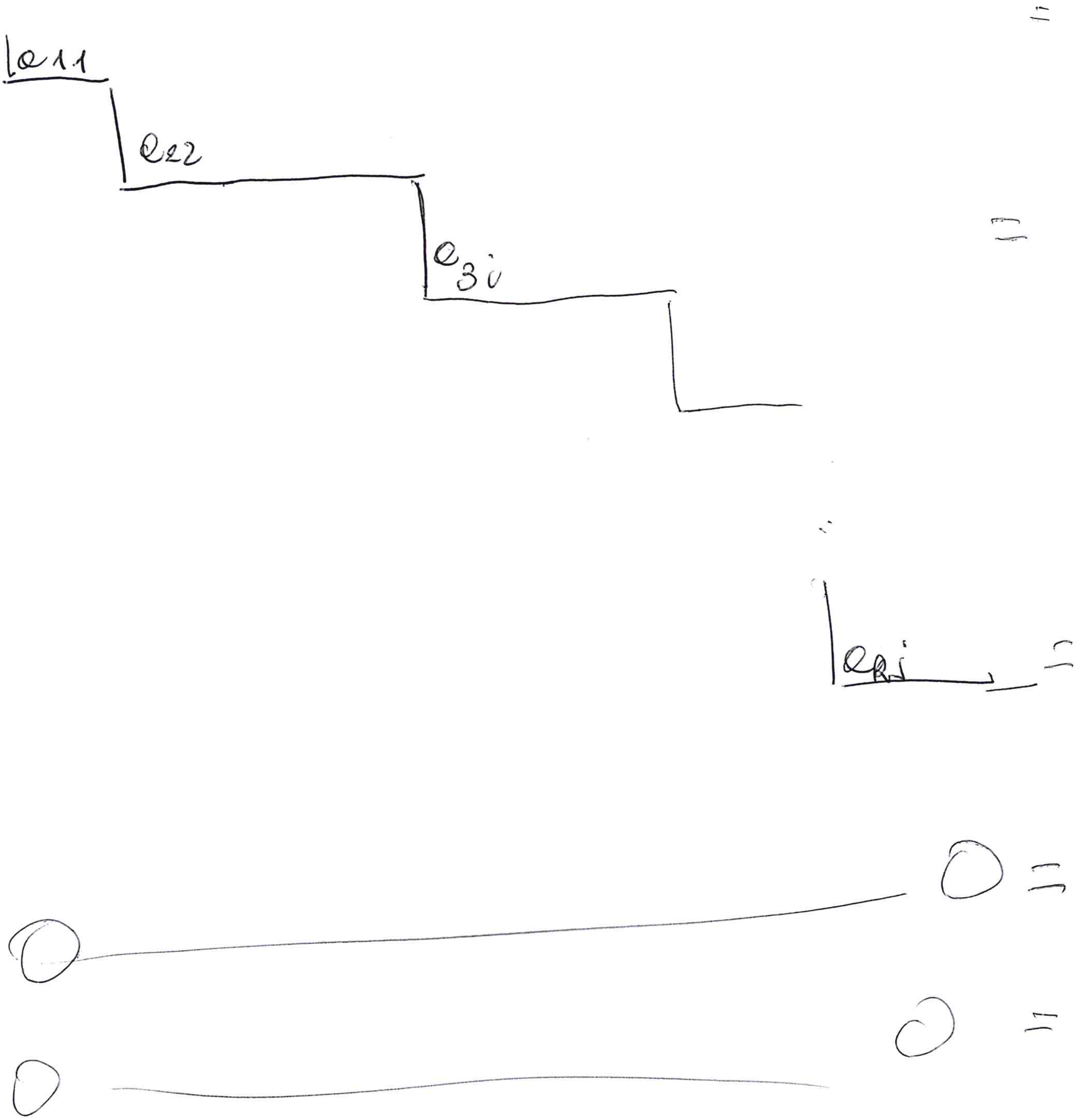
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_{k-1} \\ c_{k+1} \\ c_q \end{pmatrix}$$

è una soluzione del sistema senza la colonna nulla (quindi q diventa $q-1$) mettendo come x_k un numero reale α qualunque

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_{k-1} \\ \alpha \\ c_{k+1} \\ c_q \end{pmatrix}$$

è una soluzione del sistema originale con la colonna nulla.

iterando questo procedimento si arriva ad una matrice a scala fatta così



Ora due sono i casi. Le righe sotto k sono tutte $0 = 0$. Allora il sistema è risolubile.

C'è qualche riga sotto la k che dice $0 = c$

Allora il sistema non ha soluzioni

Se siamo nel primo caso. (vedi figura)

$a_{11} \neq 0$ $a_{22} \neq 0$ $a_{3i} \neq \dots$ $a_{pj} \neq 0$

sono i pivots che sono coefficienti delle variabili $x_1, x_2, x_i \dots x_j$ che sono un certo numero s

Tutta la parte di equazione che non contiene queste variabili la portiamo a secondo membro. Ora abbiamo un sistema di s equazioni in s incognite i cui termini noti dipendono da $q-s$ parametri che possono assumere valori arbitrari. Diciamo che il sistema ha ∞^{q-s} soluzioni

- Se $p \geq q$ (più equazioni che incognite) può essere che la scala sia più regolare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{qq} \\ \end{pmatrix}$$
$$0 \quad \text{———————} \quad 0$$

Non ci sono variabili a secondo membro: il sistema ha un'unica soluzione facilmente calcolabile partendo dal fondo.

Anche nel caso precedente è facile calcolare: il sistema è supponendo per semplicità che i pivots corrispondono a $x_1, \dots, x_s$

$$f_1(x_1 - x_s) = g_1(x_{s+1}, \dots, x_q)$$

$$f_2(x_2 - x_s) = g_2$$

$$f_3(x_3 - x_s) = g_3$$

$$a x_{s-1} + c' x_s = g_{s-1}$$

$$a x_s = g_s(x_{s+1} \dots x_k)$$

Data un valore a $x_{s+1}, \dots, x_k$. Calcolata x_s, sostituita, calcolata x_{s-1} e così via salendo.