Lezione 7 11-12.11.2020

Ci piacerebbe ridurre l'algebra lineare a conti su matrici e sistemi lineari. Questo in effetti è possibile, come vedremo in questa lezione.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale di dim n. Ogni base $\mathcal{B}$ di V determina un isomorfismo $F_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{R}^n$.

dim Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ definiamo

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- $F_{\mathcal{B}}$ è lineare

$$v_1 = x_1 v_1 + \quad + x_n v_n$$
$$v_2 = y_1 v_1 + \quad + y_n v_n$$
$$v_1 + v_2 = (x_1+y_1) v_1 + \dots + (x_n + y_n) v_n$$

$$- F_{\mathcal{B}}(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(v_1) + F_{\mathcal{B}}(v_2)$$

$$a v = a x_1 v_1 + \dots + a x_n v_n$$

$$- F_{\mathcal{B}}(a v) = \begin{pmatrix} a x_1 \\ \vdots \\ a x_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a F_{\mathcal{B}}(v)$$

$$\operatorname{Ker} F_{\mathcal{B}} = \{ v \in V \mid F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ 0v_1 + \cdots + 0v_n \} = \{0\}$$

$\operatorname{Im} F_{\mathcal{B}} = \mathbb{R}^n$. Infatti se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$X = F_{\mathcal{B}}(v)$ dove $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Dunque $F_{\mathcal{B}}$ è iniettiva e suriettiva cioè è un isomorfismo di V con $\mathbb{R}^n$.

Ogni base dà un isomorfismo. Come cambia l'isomorfismo se cambio base?

Notate che $F_{\mathcal{B}}(v_1) = e_1 \ldots F_{\mathcal{B}}(v_n) = e_n$

Sia $\mathcal{B}' = (w_1 - w_n)$ un'altra base

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "M"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$F_{\mathcal{B}} \circ F_{\mathcal{B}'}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare

e vorremmo se $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n =$ che
$= y_1 w_1 + \quad + y_n w_n$

$$M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Per capire di più calcoliamo M per colonne ③
che sono per definizione le immagini
di $e_1, \dots, e_n$.

Ricordiamoci che $M = F_{\mathcal{B}} \circ F_{\mathcal{B}'}^{-1}$

Quindi $M(e_j) = F_{\mathcal{B}}(w_j) =$ coordinate di w_j nella base $\mathcal{B}$.

Dunque $M = \begin{pmatrix} F_{\mathcal{B}}(w_1) & \dots & F_{\mathcal{B}}(w_n) \end{pmatrix}$

Naturalmente $F_{\mathcal{B}'} \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} F_{\mathcal{B}'}(v_1) & \cdots & F_{\mathcal{B}'}(v_n) \end{pmatrix}$

(L'inverso di $F_{\mathcal{B}} \circ F_{\mathcal{B}'}^{-1}$ è $F_{\mathcal{B}'} \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}$)

Vediamo se sono utili questi isomorfismi considerando un esempio

$\mathbb{R}_3[t] = \{\text{polinomi di grado} \leq 3\}$. $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$

Consideriamo $V = \text{span}(p_1, p_2, p_3)$, $W = \text{span}(q_1, q_2)$

dove $p_1(t) = t^2 - t$
$p_2(t) = 1 + t^2$
$p_3(t) = -1 - t$

$q_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$
$q_2(t) = 1 - t + t^2 - t^3$

Vogliamo calcolare $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V+W)$.

- dim V.

Abbiamo un isomorfismo $F_{\mathcal{B}}: \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^4$

In questo isomorfismo

$$F_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(p_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dim V = massimo numero di polinomi indip tra p_1, p_2, p_3 = massimo numero di colonne indip. tra $F_{\mathcal{B}}(p_1)$, $F_{\mathcal{B}}(p_2)$, $F_{\mathcal{B}}(p_3)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne calcolo il rango riducendo a scala. Scambio una riga

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

chiaramente il rango è 2 $(R_2 = R_3)$

$\Rightarrow$ dim V = 2 $\quad$ base di V = $\{p_1, p_2\}$

~~Ora~~ q_1 e q_2 sono indipendenti (q_1 non è multiplo di q_2), quindi dim W = 2

Ora metto in un'unica matrice $F_{\mathcal{B}}(p_1)$, $F_{\mathcal{B}}(p_2)$, $F_{\mathcal{B}}(q_1)$, $F_{\mathcal{B}}(q_2)$, che generano $F_{\mathcal{B}}(V+W)$, e ne calcolo il rango

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2 righe uguali, 3 pivots
rango 3

$\dim(V+W) = 3$ $\dim V \cap W = 2+2-3 = 1$.

Ancora più interessante.

Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare

Sia $n = \dim V$ e $\mathcal{B} = (v_1 \ldots, v_n)$ una sua base;
sia $s = \dim W$ e $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_s)$ una sua base.

Consideriamo $F_{\mathcal{B}}$ e $F_{\mathcal{C}}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s \end{tikzcd}$$

L'applicazione $F_{\mathcal{C}} \circ T \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}$ è lineare ed è data dalla matrice $A \in M(s,n)$.

A è la MATRICE ASSOCIATA a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Vediamo come è fatta A. Le sue colonne sono le immagini di $e_1, -, e_n$.

Calcoliamo $A(e_j)$

$$F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_j) = v_j \qquad T F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_j) = T(v_j)$$

$$F_{\mathcal{C}} T F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_j) = F_{\mathcal{C}}(T(v_j)) = \text{coordinate di } T(v_j) \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base $\mathcal{C}$.

<u>Esempio</u> $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$

$$T(p(t)) = (t+1)p'(t)$$

Scriviamo la matrice associata a T (verificate che T è lineare!) rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$

Scriviamo

$$T(1) = (t+1)(1)' = 0 = \quad F_{\mathcal{B}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = (t+1)t' = t+1 \qquad F_{\mathcal{B}}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = (t+1)(2t = 2t^2 + 2t$$

$$F_{\mathcal{B}}(2t^2 + 2t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t^3) = (t+1)(3t^2) = 3t^3 + 3t^2 \quad F_{\mathcal{B}}(3t^3 + 3t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vedete che T ha rango 3 che $\ker T = \{$polinomi costanti$\}$ e che $\operatorname{Im} T$ ha per base $T(t)$, $T(t^2)$, $T(t^3)$, cioè $t+1$, $2t^2+2t$, $3t^3+3t^2$.

Viceversa se abbiamo $F_{\mathcal{B}}$, $F_{\mathcal{C}}$ e una matrice $A \in M(l,n,\mathbb{R})$ possiamo definire $T : V \to W$ come

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd} \qquad T = F_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ F_{\mathcal{B}}.$$

Ovvero $T(v_j)$ ha come coordinate, rispetto a $\mathcal{C}$, la colonna A^j di A.

Questo significa che c'è una biiezione (applicazione biunivoca)

$$\mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}\mathcal{C}}} M(l,n)$$

che associa a T la sua matrice associata nelle basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W.

Ma $\varphi_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è lineare.

$\varphi_{BC}(T+S) = \varphi_{BC}(T) + \varphi_{BC}(S)$ perché

$$A_{T+S} = A_T + A_S$$

le colonne di $A_{T+S} = \varphi_{BC}(T+S)$ sono le coordinate nella base C dei vettori $(T+S)(v_1) \dots (T+S)(v_n)$

Ma A^j_{T+S} = coordinate di $(T+S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j)$

$$= A^j_T + A^j_S$$

Analogamente $\varphi_{BC}(aT) = a\,\varphi_{BC}(T)$

$$A_{aT} = a\,A_T$$

• inoltre φ_{BC} è un isomorfismo perché è ~~lineare~~ biunivoca, quindi è iniettiva e surgettiva.

Ma allora $\mathcal{L}(V, W)$ e $M(s, n)$ essendo isomorfi hanno la stessa dimensione.

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M(s, n) = s \cdot n =$$
$$= \dim V \cdot \dim W.$$

La matrice associata a T dipende dalle basi scelte. Vediamo come cambia al variare delle basi.

$\mathcal{B} = (v_1 - v_n)$ $\quad \mathcal{B}' = (v_1' \cdots v_n')$ $\qquad$ quindi:

$\mathcal{C} = (w_1 - w_j)$ $\quad \mathcal{C}' = (w_1' - w_j')$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rrr, "T"] \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}}"] & & & W \arrow[dl, "F_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{C}'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "M"] \arrow[rrrrr, bend right, "A'"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^J & & \mathbb{R}^J \arrow[ll, "N"']
\end{tikzcd}$$

Le frecce dei 2 triangoli sono tutte invertibili.

Come è fatto $A' = F_{\mathcal{C}'} \, T \, F_{\mathcal{B}'}^{-1}$?

Possiamo scrivere $\quad M F_{\mathcal{B}'} = F_{\mathcal{B}}$ per cui $F_{\mathcal{B}'} = M^{-1} F_{\mathcal{B}}$

Analogamente $\quad N F_{\mathcal{C}'} = F_{\mathcal{C}} \qquad F_{\mathcal{C}'} = N^{-1} F_{\mathcal{C}}$

$$F_{\mathcal{B}'}^{-1} = F_{\mathcal{B}}^{-1} M$$

sostituiamo

$$A' = N^{-1} \underbrace{F_{\mathcal{C}} \circ T \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}} M =$$

$$\boxed{A' = N^{-1} \, A \, M}$$

Questa è una relazione di equivalenza in $M(J, n)$. Infatti

- E' riflessiva $\quad A = I_J^{-1} A I_n = I_J A I_n = A$
- E' simmetrica $\quad B = N^{-1} A M \Rightarrow A = N B M^{-1}$
- E' transitiva $\quad B = N^{-1} A M, \; C = N_1^{-1} B M_1 = N_1^{-1} N^{-1} A M M_1$
$= (N N_1)^{-1} A (M M_1)$

Quindi $M(s, n)$ è diviso in classi di equivalenza.

Caso particolare $W = V$ quindi $s = n$, $T: V \to V$ per ogni base $\mathcal{B}$ la matrice associata a T è $n \times n$. Se ora prendo un'altra base $\mathcal{B}'$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] \arrow[rrr, bend right, "A'"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "M"']
\end{tikzcd}$$

si ha $A' = M^{-1} A M$

è un'altra relazione di equivalenza che si chiama similitudine.

Mentre l'equivalenza $B = N^{-1} A M$ in $M(s, n)$ ha un modo facile di caratterizzare le classi di equivalenza, la vedremo giovedì 19, non è così per la similitudine.