CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2020/2021 – Correzione Appello 04/11/2020

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. La matrice è predominante diagonale se $|\alpha| < 1$ e $|\beta| < 1$.
2. Dopo i primi n passi di eliminazione gaussiana la matrice è ridotta in forma tringolare
$$A^{(n)} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & -\alpha I_n \\ \hline 0_n & (1-\alpha\beta)I_n \end{array}\right].$$
Segue che la fattorizzazione LU esiste per ogni α, β. Inoltre se $1-\alpha\beta \neq 0$ la fattorizzazione è unica per il teorema di esistenza ed unicità. Se, viceversa, $1-\alpha\beta = 0$ la fattorizzazione non è unica potendo ottenere differenti fattori triangolari inferiori L.
3. Posto J la matrice di iterazione del metodo di Jacobi, per $\lambda \neq 0$ si ha
$$(\lambda I - J) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_n & \alpha I_n \\ \hline \beta I_n & \lambda I_n \end{array}\right] = \lambda \left[\begin{array}{c|c} I_n & (\alpha/\lambda) I_n \\ \hline (\beta/\lambda) I_n & I_n \end{array}\right],$$
da cui per il punto precedente $\det(\lambda I - J) = \lambda^{2n}(1 - \frac{\alpha\beta}{\lambda^2})^n = (\lambda^2 - \alpha\beta)^n$. Segue che $\rho(J) = \sqrt{|\alpha\beta|}$ e quindi la convergenza se e soltanto se $|\alpha\beta| < 1$.

Esercizio 2

1. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\lim_{x\to o^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 1/x + (2x^2+4x+4)/(2x+2)^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ e $f''(x) = -1/x^2 - 1/(x+1)^3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Segue che $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale α con $\alpha \in [1, 2]$.
2. Dal teorema di convergenza in grande segue la convergenza della successione generata a partire da $x_0 \in (0, \alpha)$. Per $x_0 = 2$ si ottiene $x_1 = 2 - (18/19)(\log 2 + 1/3) >= 2 - (18/19)(4/3) > 0$ e quindi segue la convergenza.
3.
```
function [x0,it] = ing_04_11_2020(x0, tol)
f=@(x) log(x)-(2-x^2)/(2*x+2);
f1=@(x)1/x + (x^2 +2*x +2)/(2*(x+1)^2);
f0=f(x0);
err=abs(f0);
it=0;
while(err>tol)
    x0=x0-f0/f1(x0);
    f0=f(x0);
    err=abs(f0);
    it=it+1;
end
end
```