Nome **Matricola**

ALGEBRA LINEARE

Primo appello 12 Gennaio 2021

Esercizio 1. Siano $P, Q \in \mathbb{R}^3$ due punti di coordinate rispettivamente $(1,0,1), (0,-1,1)$. Scrivere l'equazione del piano asse del segmento $\overline{PQ}$. Si ricorda che l'asse di un segmento in $\mathbb{R}^n$ è l'iperpiano perpendicolare al segmento dal quale gli estremi del segmento sono equidistanti.

Esercizio 2. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare tale che $T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_3, \ldots, T(v_{n-1}) = v_n, T(v_n) = 0$. Calcolare le dimensioni dei nuclei di $T, T^2, \ldots, T^n$.

a) Dimostrare che T è triangolabile, ma non diagonalizzabile.

b) Trovare una base di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice associata a T rispetto ad essa sia triangolare superiore.

Esercizio 3. Sia A una matrice $n \times n$ che ha solo autovalori 1 e -1 (cioè il suo polinomio caratteristico è $(1-x)^s(-1-x)^{n-s}$). Si supponga che il polinomio $P(x) = (x^2-1)(x^2-2)$ verifichi $P(A) = 0$. Calcolare il polinomio minimo di A e dimostrare che A è simile ad una matrice diagonale.