CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

A.A. 2020/2021 – Correzione Appello 23/06/2021

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. La matrice è predominante diagonale per $|\alpha| > |\beta|$.
2. Per $\alpha \neq 0$ la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è $J = \frac{\beta}{\alpha}P$ con $P = (p_{ij})$ tale che
$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j-1 \text{ o } i = n, j = 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$
Dalla relazione $P\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ si ottiene che $\lambda^n = 1$ e quindi $|\lambda| = 1$ da cui si ricava che gli autovalori di J hanno modulo $|\beta/\alpha|$. Pertano Jacobi è convergente $\iff \rho(J) < 1 \iff |\beta/\alpha| < 1 \iff A$ è predominante diagonale.
3. Se A è predominante diagonale allora $\| J \|_\infty = |\beta/\alpha| < 1$. È quindi sufficiente prendere k tale che $|\beta/\alpha|^k < 2^{-48}$ da cui $k > 48/\log_2(|\alpha/\beta|)$.

Esercizio 2

1. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 2x + 1/x > 0$ $\forall x > 0$, e $f''(x) = 2 - 1/x^2 \geq 0$ per $x \geq \sqrt{1/2}$. Inoltre vale $f(\sqrt{1/2}) = (1/2)(1-\log(2)) > 0$ e $f(1/2) = 1/4 - \log(2) < 1/4 - \log(\sqrt{e}) < 0$. Segue che $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale α con $\alpha \in [1/2, \sqrt{1/2}]$.
2. Per $0 < x_0 < \alpha$ la convergenza segue dal teorema in grande.
3.
```
function [x0,it] = inf23062021(tol)
err=inf;
it=0; x0=0.5;
f=@(x)x^2 + log(x);
f1=@(x)2*x + 1/x;
while(err>tol)
    x=x0-f(x0)/f1(x0);
    err=abs(x-x0);
    it=it+1;
    x0=x;
end
end
```