Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 6
LIMITI E CONTINUITÀ
PRIMA PARTE

1 Limiti

La definizione di limite è quella per funzioni di una variabile espressa tramite intorni o distanze FT5: avvicinandosi ad un punto di *accumulazione*, FT2, per il dominio (o andando all'infinito) lungo il dominio, senza toccare il punto di accumulazione, i valori della funzione si avvicinano sempre più ad un determinato valore: se ciò accade tale valore è un limite.
Ad una tale teoria iniziale relativamente povera corrisponde una pratica che può esser difficile a piacere, e che si basa *sui limiti in una variabile* e di successioni, e sopra ogni cosa sull'*uso delle diseguaglianze* e dei *teoremi di esistenza dei limiti* quali quelli dati dalla nozione di sequenziale compattezza.

1.1 Limiti. Si estende la definzione di limiti di funzioni di una variabile a valori in spazi cartesiani, a funzioni su $D \subseteq M$ spazio (pseuo-)metrico (M, d) a valori in un altro spazio (pseudo-)metrico con distanza d':
- se u è un punto di *accumulazione per* D, si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v (lungo D) per x che tende a u, se,
dette d e d' le funzioni distanza su dominio e codominio, si ha:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x, u) \leq \delta \text{ allora } d'(f(x), v) \leq \varepsilon,$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in D: 0 < d(x,u) \leq \delta} d'(f(x), v) = 0.$$

- ovvero se *per ogni intorno di* v *esiste un intorno di* u, *eventualmente privato di* u, la cui immagine mediante f vi è contenuta. Si possono usare diverse notazioni:

$$f(x) \to v,\ x \to u,\ x \in D, \text{ o } f(x) \underset{x \to u,\ x \in D}{\longrightarrow} v, \text{ o anche } \lim_{x \in D,\ x \to u} f(x) = v, \text{ o anche}$$

$$\lim_{x \in D,\ x \to u} d'(f(x), v) = \lim_{x \in D,\ x \to u} |f(x) - v|' = \lim_{x \in D,\ d(x,u) \to 0} d'(f(x), v) = 0.$$

Osservazione: si noti che nella definizione $x \neq u$. Appunto interessa il comportamento "asintotico" di f avvicinandosi a u, non l'eventuale valore $f(u)$ nel caso in cui $u \in D$, infatti u potrebbe non appartenere a D!
- Se f è a valori in $\mathbf{R}^m$, per la 1) delle diseguaglianze per componenti FT1-1, f converge a v se e solo se ogni funzione o successione componente f_i, $f_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$, converge all'omologa componente v_i di v.

Pur potendo esprimere, nel linguaggio degli intorni e delle distanze, anche l'idea di "limiti all'infinito" e di limiti "divergenti", convien elencare esplicitamente delle definzioni.
Limiti all'infinito: se D *non è limitato*, si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v lungo D per x che tende all'infinito, se:

$$\text{vi è n } p \text{ per cui } \forall \varepsilon > 0\ \exists K \text{ per ogni } x \in D \text{ se } d(x, p) \geq K \text{ allora } d'(f(x), v) \leq \varepsilon,$$

ovvero se ogni palla centrata in v contiene l'immagine mediante f del complementare di una palla centrata in p. Si possono usare diverse notazioni:

$$f(x) \to v,\ d(x,p) \to \infty,\ x \in D, \text{ o } f(x) \underset{d(x,p) \to \infty,\ x \in D}{\longrightarrow} v, \lim_{x \in D,\ d(x,p) \to \infty} f(x) = \lim_{x \in D,\ x \to \infty} f(x) = v, \text{ o}$$

$$\lim_{x \in D,\ d(x,p) \to \infty} d'(f(x), v) = \lim_{x \in D,\ |x - p| \to \infty} |f(x) - v|' = \lim_{x \in D,\ x \to \infty} |f(x) - v|' = 0.$$

Osservazione: per la diseguaglianza triangolare il punto p è del tutto indifferente. Ogni punto andrebbe bene. In particolare nel caso di $\mathbf{R}^M$ lo $0_{\mathbf{R}^m}$.

Osservazione: - Nel caso la funzione sia *definita su tutto* $\mathbf{R}$ la definizione appena sopra data significa che vi sono i due limiti per $x \to +\infty$, e per $x \to -\infty$ e sono *uguali.*

Limiti verso un insieme: - se C contiene dei punti di accumulazione di D si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v lungo D per x che tende a C, se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < dist(x, C) \le \delta \text{ allora } d'(f(x), v) \le \varepsilon,$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in D: 0 < dist(x,C) \le \delta} d'(f(x), v) = 0.$$

Si usano diverse notazioni:

$$f(x) \to v,\ x \to C,\ x \in D, \text{ o } f(x) \xrightarrow[dist(x,C)\to 0,\ x\in D]{} v,\ \lim_{x \in D,\ dist(x,C) \to 0} f(x) = \lim_{x\in D,\ x \to C} f(x) = v$$

$$\lim_{x \in C,\ x \to u} d'(f(x), v) = \lim_{x \in D,\ x \to C} |f(x) - v|' = \lim_{x\in D,\ dist(x,C) \to 0} d'(f(x), v) = 0.$$

Limiti divergenti. - Se $f : D \to \mathbf{R}$ ed u è di accumulazione per D si dice che $f \to +\infty$ ovvero che *diverge positivamente* per x che tende a u lungo D se

$$\forall H > 0\ \exists \delta \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x, u) \le \delta \text{ allora } f(x) \ge H.$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta \to 0} \inf_{x\in D: 0 < d(x,u) \le \delta} f(x) = +\infty.$$

- Analoga la definzione di *divergenza negativa.*

Osservazione: le diverse nozioni possono quindi essere "miscelate": limiti divergenti all'infinito, limiti verso un insieme divergenti, e così via.

Osservazione - Per le convergenze introdotte *valgono le usuali proprietà algebriche dei limiti.*
- • Per funzioni che non siano a valori reali *non ha in generale senso la permanenza del segno.* Piuttosto vale l'analogo per la distanza da un fissato punto: se $f(x) \to v$, $x \to u$ e $d(v, p) > 0$ allora in un intorno opportuno di u tranne al più u, si ha $d(f(x), p) > 0$.

Teorema 1: unicità del limite con distanze per la diseguaglianza triangolare:

in uno *spazio metrico* il limite se esite è unico.

In spazi psudometrici i diversi limiti sono tutti e soli quelli a distanza 0 da uno di essi.

Teorema Ponte 2. Se λ è di accumulazione per D o D è illimitato e $\lambda = \infty$ si ha:

$$\lim_{x \in D,\ x \to \lambda} f(x) = v \text{ se e solo se}$$

$$\text{per ogni successione } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,\ \underline{x_n \in D \setminus \{\lambda\}} \text{ si ha } f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

Dimostrazione: $\Rightarrow$) immediato dalle definizoni.

$\Leftarrow$) se $\sup_{0<d(x,\lambda)\le\delta} d'(f(x), v) \not\to 0$ per $\delta \to 0^+$, vi sarebbe $\varepsilon > 0$, e per ogni n vi sarebbe $x_n \ne \lambda$ con $d(x_n, \lambda) \le \frac{1}{n}$ e $d'(f(x), v) \ge \varepsilon$.

Osservazione: similmente se al posto delle successioni si usano cammini "passanti" per λ.

Osservazione: - il teorema ponte è utile per vedere che il limite non esiste: o si trova una successione $x_n,\ n \in \mathbf{N}$, $x_n \to \lambda$, $x_n \ne \lambda$ per cui $\nexists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, o due successioni $x_n,\ n \in \mathbf{N}$, $x_n \to \lambda$, $x_n \ne \lambda$ e $y_n,\ n \in \mathbf{N}$, $y_n \to \lambda$, $y_n \ne \lambda$ per cui $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \ne \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Critrerio di restrizione: Similmente per vedere che il limite non esiste basta trovare A, $B \subseteq D$, λ di accumulazione per entrambi (o se $\lambda = \infty$ entrambi illimitati), per cui i limiti di $f(x)$ per $x \to \lambda$ lumgo A e lungo B o non esistono o sono diversi.

Esempio 1: - $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\nexists \lim_{x^2+y^2+z^2 \to \infty} f$: $f(x, 0, 0) = 1$, $f(0, 0, z) = \dfrac{1}{z} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$.

Esempio 2: $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ non ha limite $(x,y)\to(0,0)$: in coordinate polari $f=\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$, restrigendosi alle semiretta da $(0,0)$ $\varphi=0$ e $\varphi=\frac{\pi}{4}$ si ottengono limiti diversi.

Esempio 3: $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$ non ha limite per $(x,y)\to(0,0)$: invece delle coordinate polari (cioè linee coordinate che sono cerchi e semirette) è bene utilizzare come linee, per l'origine, le parabole definite da $y=ax^2$, poichè la funzione su di esse è costante $f(x,y)=\dfrac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^4}}$.

Esempio 4, uso limiti di una variabile: $f(x,y,z,w)=\dfrac{e^{x^2yzw}-xz\sin xyw-1}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^4}=$

Taylor per $\begin{cases} e^s \\ \sin t \end{cases}$

$$=\frac{1+x^2yzw+O(\rho^{10})-xzxyw+O(\rho^{11})-1}{\rho^8}=\frac{O(\rho^{10})}{O(\rho^8)}\xrightarrow[(x,y,z,w)\to(0,0,0,0)]{}0.$$

1.2 Limiti ed limiti iterati. ATTENZIONE! - *non è in generale vero* che data una funzione di due variabili $f(x,y)$, $D=\mathbf{R}^2$ e un punto $u=(a,b)$ nel piano cartesiano esista $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ pur esistendo uguali i due limiti iterati:

$$\exists\lim_{x\to a} f(x,y)=l(y),\ \exists\lim_{y\to b} f(x,y)=m(x),\ \exists\lim_{y\to b} l(y)=\lim_{x\to z} m(x).$$

- Inoltre potrebbe esser che i due limiti iterati siano diversi : $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=l(y)$, $\exists\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=m(x)$ ma $\exists\lim\limits_{y\to b} l(y)=l$, $\exists\lim\limits_{x\to z} m(x)=m$ ma $l\neq m$.

Esempio 5: per $f(x,y)=x^y+y^x,\ x>0,\ y>0$ non esiste il limite per $(x,y)\to(0,0)$ $(f(x,x)\to 2,\ f(x,e^{-\frac{1}{x}})\to 1+\frac{1}{e})$, mentre esistono e sono uguali i due limiti iterati $\lim\limits_{x\to 0^+}\lim\limits_{y\to 0^+} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0^+}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,y)=1$.

Esempio 6: $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$: $\lim_{x\to 0} f(x,y)=f(0,y)=-1$, $\lim_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)=1$. Inoltre non ha limite per $(x,y)\to(0,0)$: su i due cammini $t\mapsto(0,t)$, $t\mapsto(t,0)$, che si avvicinano a $(0,0)$ ha limiti diversi.

1.3 Limite superiore e limite inferiore. - Si definiscono per le funzioni a *valori reali*, il **limite superiore** e **il limite inferiore** rispettivamente come il

massimo e il *minimo* dei *valori limite* (eventualmente infiniti)

delle successioni con limite $(f(x_n))$, immagine mediante f di successioni (x_n) in D che si avvicinano a p, $d(x_n,p)\to 0$, senza definitivamente passarci, $x_n\neq p$. Più concisamente si definiscono:

$$\liminf_{\substack{x\to p\\ x\in D}} f(x)=:\sup_{r>0}\inf_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x)=\lim_{r\to 0^+}\inf_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x)\ ,$$
$$\limsup_{\substack{x\to p\\ x\in D}} f(x)=:\inf_{r>0}\sup_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x)=\lim_{r\to 0^+}\sup_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x).$$

Osservazione: - le due funzioni $\omega(r)=\inf\limits_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x)$, $\Omega(r)=\sup\limits_{\substack{0<d(x,p)\leq r\\ x\in D}} f(x)$ sono rispettivamente decrescente e crescente rispetto ad $r>0$: quindi esistono i loro limiti per $r\to 0^+$.

- Quindi a differenza del limite *il limite inferiore ed il limite superiore esistono sempre.*

Teorema 3: il *limite* di una funzione reale *esiste* se e solo se
il *limite superiore* e quello *inferiore sono eguali*, e coincide con il loro comune valore.

2 Continuità in punctis e successioni

La nozione di continuità ha grande rilevanza. Può esser intodotta in ambito molto astratto, qui per funzioni tra spazi metrici "ripetendo" quanto già scritto per funzioni di una variabile.
2.1 La nozione di funzione continua in un punto. Sia $f : D \to E$, D con (pseudo)-distanza d, ed E con (pseudo)-distanza d', $u \in D$. Si dice che f è *continua in* u (lungo D) se:

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ per ogni $x \in D$ se $0 < d(x, u) \leq \delta$ allora $d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon$;

ii) ovvero: $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{x \in D: d(x,u) \leq \delta} d'(f(x), f(u)) = 0$;

iii) ovvero:
ogni palla centrata in $f(u) \in E$ contiene l'immagine per f di una palla centrata in $u \in D$;
iv) ovvero: *la preimmagine di un intorno di $f(u)$ è intorno di u.*

Osservazione: - se u è d i *accumulazione* per D equivale a $\lim\limits_{x \to u,\, x \in D} f(x) = f(u)$;
- se u è un *punto isolato* dagli altri punti di D da una palla di raggio $\rho > 0$, la premessa dell'implicazione è sempre falsa per $\delta < \rho$. Quindi nel caso di un punto $u \in D$ isolato in D *ogni funzione definita su D* è continua in u lungo D.

• Osservazione: per iv) se si cambiano le distanze d e d' con distanze topologicamente equivalenti, sul dominio e sul codominio, la continuità o meno in u della funzione non cambia, non cambiando la nozione di intorno di u e di intorno di $f(u)$, cfr. FT2-2.3.

Osservazione: nel caso di distanze definite con norme, omettendo di specificare a quale norma ci si riferisce, si ottiene la stessa definizione di continuità che si dà per funzioni di una variabile:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < |x - u| \leq \delta \text{ allora } |f(x) - f(u)| \leq \varepsilon.$$

Osservazione. - Una funzione f potrebbe esser definita anche su un insieme G, su cui è data la distanza d, più grande di D: $G \supset D$. La distanza su D nel caso è semplicemente data dalla restrizione di d a $D \times D$, cfr. FT2-2.3.
- La continuità di f lungo D in $u \in U$ vuol quindi dire che ogni palla centrata in $f(u) \in E$ contiene l'immagine mediante f *dell'intersezione di D* con una palla centrata in $u \in D$.
- Potrebbe succedere che f è continua in u lungo D ma non continua lungo G:
Esempio 7:
$D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, $G = \mathbf{R}$, $u = 0$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = 1$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x \leq 0$

Criterio di restrizione: se f è definita sia su A che su B, ed $u \in A \cap B$, ed f è continua in u lungo A ed è continua in u lungo B, allora f è continua in u lungo $A \cup B$.
Infatti dato $\varepsilon > 0$ si prende il *minimo tra i due δ:* quello relativo ad A e quello relativo a B.

Teorema 4: continuità della funzione composta: si premette il principale teorema per costruire funzioni continue:
$f : D \to E$, $g : E \to F$, d, d', d'' (pseudo)-distanze rispettivamente su D, E, F,se f è continua in $u \in D$ e g è continua in $f(u) \in E$ lungo Imf allora $g_o f : D \to F$ è continua in u.
Dimostrazione: segue direttamente dalla definzione iv).

Proposizione 0 Sia $f : (D, d) \to (D_1, d_1) \times \cdots \times (D_m, d_m)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in D$.

f è continua in u se e solo lo sono le sue funzioni componenti.

Dimostrazione: dalle diseguaglianze per componenti, FT1-1:
$d_i(f_i(x), f_i(p)) \leq d_{\times_2}(f(x), f(p)) \leq \sqrt{m} \max_j d_j(f_j(x), f_j(p)) = d_{\times_\infty}(f(x), f(p))$.

Osservazione: Per funzoni di una variabile reale, o successioni, a valori in spazi cartesiani la trattazione, come visto, è uguale (grazie alla diseguaglianza per componenti) a quella di funzioni reali di una variabile. Quindi la vera novità, che richiede diverse abilità rispetto alla teoria delle funzioni di una variabile, stà appunto nelle più variabili del dominio. Infatti come i limiti in più variabili la continuità in più variabili è difficilmente riconducibile alla continuità in una variabile per ognuna delle variabili in gioco (continuità *separata* versus *globale*):

- ATTENZIONE! *non è in generale vero* che data una funzione di due variabili $f(x, y)$, $D = \mathbf{R}^2$ e un punto $u = (a, b)$ nel piano cartesiano, per esempio $u = (0, 0)$, per cui le due funzioni $\varphi(x) = f(x, 0)$ e $\psi(y) = f(0, y)$ siano continue rispettivamente in $a = 0$ e in $b = 0$, la funzione f sia continua in $(0, 0)$. Un esempio è il seguente:

Esempio 8:
$$f(x, y) = \begin{cases} 7 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$
il grafico di tale funzione è costruito sollevando "a quota" 7, dal piano coordinato in $\mathbf{R}^3$ di equazione $z = 0$ le due rette coordinate (definite dalle due coppie di equazioni $y = 0,\ z = 0$ e $x = 0,\ z = 0$) ottenendo le due rette definite rispettivamente dalle due coppie di equazioni $y = 0,\ z = 7$ e $x = 0,\ z = 7$. Il grafico non è "tutto di un pezzo" pur essendo il dominio $\mathbf{R}^2$ "tutto di un pezzo" come dovrebbe essere per una funzione continua che si rispetti: cfr. par. 5 teo. 13.3.

2.2 Semicontinuità.- Una funzione $f : D \to \mathbf{R}$ a valori reali si dice *semicontinua inferiormente, sci, [superiormente, scs]* in $q \in D$ di accumulazione per D se
$$\liminf_{x \in D,\ x \to q} f(x) \geq f(q) \ [\limsup_{x \in D,\ x \to q} f(x) \leq f(q)].$$
Proposizione 1: Una funzione reale è continua in un punto di accumulazione del suo dominio se e solo se è sia sci che scs in quel punto.

2.3 Successioni e continuità puntuale, cfr. FT5:

Convergenza di successioni in spazi metrici: Come in FT5, se (A, d) è uno spazio pseudo metrico, $a \in A$, ed $x : \mathbf{N} \to A$ è una successione si dice che $x_n,\ n \in \mathbf{N}$ converge ad a se
$$d(x_n, a) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$
Si scrive $d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a$ o $x_n \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} a$.
- Per la diseguaglianza triangolare se $x_n \to a$, allora $x_n \to \alpha$ se e solo se $d(a, \alpha) = 0$.
- Quindi se d è una *distanza* il limite se esiste è *unico*.

2.3.1 Convergenze uniforme ed integrale: due esempi importanti di tali nozioni generali (oltre a quelli di convergenza di funzioni, tra spazi cartesiani, di più variabili e a valori vettoriali) sono quelli di convergenza di *funzioni a valori funzioni* $(f(x))(t) = f_x(t) \sim f(x, t)$, in particolare di *successioni di funzioni* $f_n(x)$ per la distanza *uniforme* e rispettivamente per la pseudo distanza *integrale*.
- Data una successione di funzioni f_n, a valori in uno spazio metrico (M, d), limitate, definite su un qualsiasi insieme A e un' altra funzione $f : A \to M$ limitata, si dice che la successione *converge uniformemente* ad f se converge ad f rispetto a d_∞. Cioè
$$d_\infty(f_n f) = \sup_{a \in A} d(f_n(a), f(a)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \text{ cioè}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \underline{\exists N} \in \mathbf{N} \ \forall n \geq N \ \underline{\forall a} \in A \text{ si ha } d(f_n(a), f(a)) \leq \varepsilon.$$
- Data una successione a valori funzioni f_n, reali, integrabili assolutamente in senso improprio (con integrale finito) su un intervallo I e un' altra funzione $f : I \to \mathbf{R}$ integrabile assoluta-

mente (con integrale finito), si dice che la successione *converge in area* ad f se converge ad f rispetto a d_1. Cioè

$$d_1(f_n, f) = \int_I |f_n(x) - f(x)|\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \text{ In particolare } \int_I f_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)s\, dx.$$

<u>Osservazione:</u> limite uniforme di funzioni Riemann integrabili è Riemann integrabile. Se vi e' convergenza uniforme di funzioni assolutamente integrabili in senso improrpio su un intervallo *limitato* tale è la funzione limite e vi è convergenza in area. Infatti

$$\int_I |f_n(x) - f(x)|\, dx \le \text{lunghezza}(I) \cdot \sup_I |f_n - f|.$$

2.3.2 Convergenze puntuale è una convergenza di funzioni a valori funzioni che <u>*non rientra*</u>, in generale, nella teoria proposta, cioè di convergenza rispetto ad una distanza.

-Data una successione $f_n : A \to M$, (M, d) spazio metrico, e una funzione $f : A \to M$, si dice che la successione *converge puntualmente* ad f se al variare di $a \in A$, tutte le successioni $f_n(a)$ di elementi di M convergono a $f(a)$. Cioè

$$\text{per ogni } a \in A \text{ si ha } d(f_n(a), f(a)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ cioè}$$

$$\underline{\forall a} \in A,\ \varepsilon > 0\ \underline{\exists N} \in \mathbf{N}\ \forall n \ge N \text{ si ha } d(f_n(a), f(a)) \le \varepsilon.$$

<u>Osservazione:</u> - la convergenza uniforme implica quella uniforma su sottoinsiemi del dominio;

- in particola implica quella puntuale: $d(f_n(a), f(a)) \le \sup_{x\in A} d(f_n(x), f(x))$.

- Il viceversa è falso:

<u>Esempio 9:</u> $A = [0; 1]$, $M = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ se $x \ne 1$ ed $f(1) = 1$. Si ha: $0 \le x < 1 \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ma $\sup\limits_{[0;1]} |f_n - f| \ge \sup\limits_{[0;1)} f_n = 1 \not\to 0$.

Inoltre si osserva che $d_1(f_n, f) = \displaystyle\int_0^1 x^n\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

- In effetti per la definizione di convergenza uniforme N dipende solo da ε, mentre in quella puntuale per ogni $a \in A$ si trova un $N(a)$, e variando a tali barriere portrebbero diventare sempre più grandi.

<u>Osservazione:</u> - cautela va usata per i limiti di successioni di funzioni: la stessa che va usata per i limiti di funzioni in due variabili. Infatti una successione di funzioni $f_n(x)$ puè essere vista come particolare funzione di due variabili $f(n, x)$.

- Come già osservato può essere che $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to u} f_n(x) \ne \lim\limits_{x\to u} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$:

<u>Esempio 10:</u>

$0 \le x < 1$, $u = 1$, $f(x) = 0$, $f_n(x) = x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ ma $f_n(x) = x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Esercizio: provare che se la convergenza è uniforme i doppi limiti sono eguali.

Chiusi per successioni: $C \subseteq F$ si dice *chiuso per successioni* o *sequenzialmente chiuso*, se per ogni successione $f : \mathbf{N} \to C$ se $f_n \to v \in F$, $n \to \infty$ allora $v \in C$.

Compatti per successioni: $C \subseteq F$ è *compatto per successioni*, o *sequnzialmente compatto* se ogni $f : \mathbf{N} \to C$, $f_n \in C$, ha una sottosuccessione f_{n_k} convergente per $k \to \infty$ a un v *che sia elemento di* C.

Proposizione 2. i sottoinsiemi seq. chiusi di un seq. compatto sono quelli seq. compatti.

Teorema 5: equivalenza tra chiusi e chiusi per successioni: $C \subseteq F$ è chiuso se e solo se è chiuso per successioni.

Dimostrazione: identica a quella di chiusi negli spazi cartesiani, cfr. FT5.

Corollario: i chiusi di un seq. compatto sono seq. compatti.

Osservazione: quindi la chiusura $\overline{E}$ di un insieme $E \subseteq F$ è l'insieme dei limiti di successioni a valori in E: i punti *approssimabili* con punti di E.

Continuità sequenziale: f è continua in u (lungo D) se e solo se

$$\forall s : \mathbf{N} \to D : \ s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \implies f(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(u).$$

Dimostrazione: - se u fosse isolato da D: da una parte la funzione sarebbe continua in u, d'altra parte non vi sarebbero successioni in D che convergono ad u, e quindi l'implicazione sarebbe vera.

- Se invece u fosse di accumulazione per D si usa il teorema ponte per i limiti.

3 Continuità e continuità uniforme su un dominio

3.1 Continuità: la funzione $f : A \to M$ si dice *continua su* $D \subseteq A$ se è continua in u lungo D per ogni $u \in D$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\forall u \in D} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < d(x,u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon; \text{ ovvero:}$$

$$\underline{\textit{per ogni } u \in D}: \quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{d(x,u)\leq\delta \\ \underline{x\in D}}} d'(f(x), f(u)) = \inf_{\delta>0} \sup_{\substack{d(x,u)\leq\delta \\ \underline{x\in D}}} d'(f(x), f(u)) = 0.$$

Osservazione: f potrebbe essere continua su D, ma non esser continua in nessuno punto di D, considerandola definita su tutto A.

Uniforme continuità: la funzione f si dice *uniformemente* continua su D se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \underline{\forall u \in D} \quad \forall x \in D : \ 0 < d(x,u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon; \text{ ovvero:}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{d(x,u)\leq\delta \\ \underline{u,\, x\in D}}} d'(f(x), f(u)) = \inf_{\delta>0} \sup_{\substack{d(x,u)\leq\delta \\ \underline{u,\, x\in D}}} d'(f(x), f(u)) = 0.$$

Esempio 11: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ è continua su $\mathbf{R}$ ma non uniformemente continua:

$$(n + \tfrac{1}{n}) - n \to 0 \text{ ma } (n + \tfrac{1}{n})^2 - n^2 \to 2.$$

Osservazione: come osservato per la differenza tra convergenza uniforme e convergenza puntuale di funzioni (successioni) a valori funzioni, per l'uniforme continuità δ è indipendente da u, invece per la continuità, come per la convergenza puntuale, variando u questo δ può tendere a zero.

Osservazione: il collegamento tra le nozioni di convergenza uniforme e di continuità uniforme, da una parte, e tra convergenza puntuale e continuità, dall'altra parte, è il seguente:
si considera la funzione a valori funzioni
$\omega_\delta(u) =: \sup_{\substack{d(x,u)\leq\delta \\ x\in D}} d'(f(x), f(u))$ detta massima oscillazione in u di f relativa a δ.

- - La funzione f è continua su D equivale a dire che $\omega_\delta(u) \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ puntualmente per $u \in D$.
- - La funzione f è uniformemente continua su D equivale a dire che ω_δ converge uniformemente a 0 per $\delta \to 0^+$.

Osservazione: - Se una funzione è uniformemente continua per una distanza sul dominio e una sul codominio *non è detto lo sia per distanze ad esse topologicamente equivalenti*:

Esempio 12: $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$: non è uniformemente continua con l'usuale distanza. Se invece sul dominio si usa la distanza $d'(x,y) = |x^2 - y^2|$, e sul codominio la distanza $d''(u,v) = |\text{artan } u - \text{artan } v|$, topologicamente equivalenti alla distanza usuale, la funzione diventa uniformemente continua:

$$d''(f(x), f(y)) = |\text{artan } (x^2) - \text{artan } (y^2)| \leq |x^2 - y^2| = d'(x,y)$$

- Invece *l'uniforme continuità rimane invariata rispetto a distanze metricamente equivalenti.*

Terema 6 Composizione di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

Dimostrazione: siano $f:(X,d)\to(Y,d')$, $g:(Y,d')\to(Z,d'')$ uniformemente continue:

$$\forall\varepsilon\ \exists\ \delta\quad \sup_{d'(y_1,y_2)\le\delta} d''(g(y_1),g(y_2))\le\varepsilon,$$

$$\forall\delta\ \exists\ \rho\quad \sup_{d(x_1,x_2)\le\rho} d'(f(x_1),x(x_2))\le\delta,$$

quindi
$$\forall\varepsilon\ \exists\ \rho\quad \sup_{d(x_1,x_2)\le\rho} d''(g(f(x_1)),g(f(x_2))\le\varepsilon.$$

Teorema 7: di Heine, Cantor, Borel:

funzioni continue su un seq. compatto sono uniformemente continue.

Dimostrazione: siano d e d' le distanze su domino e codominio.

- Per assurdo: se f non fosse u.c. vi sarebbero un $\varepsilon>0$ e due successioni di elementi del dominio x_n, u_n $(n\in\mathbf{N})$ per cui $d(x_n,u_n)\to 0$ e $d'(f(x_n),f(u_n))\ge\varepsilon>0$.
- Per seq. compattezza del dominio esisterebbero due sottosuccessioni convergenti y_k, v_k, rispettivamente di x_n e u_n, con limiti rispettivi y e v nel dominio. Ma deve esser $x=v$ poichè: essendo $d(x_n,u_n)\to 0$ anche $d(y_k,v_k)\to 0$ quindi $d(y,v)\le d(y,y_k)+d(y_k,v_k)+d(v_k,v)\to 0$.
- Per continuità e ancora per la diseguaglianza triangolare $d'(f(y_k),f(v_k))\to d'(f(y),f(v))=0$ contro l'assunzione $d'(f(x_n),f(u_n))\ge\varepsilon>0$.

Teorema 8: di Weierstrass: immagine continua di un seq. compatto è seq. compatta.

Dimostrazione: identica a quella per cammini già esposta FT5.

Corollario: massimi e minimi. Una funzione *a valori reali continua* su un *seq. compatto* assume un valore *massimo* e un valore *minimo* su di esso.

Dimostrazione: i compatti di $\mathbf{R}$ sono i sottoinsiemi chiusi e limitati. Quindi f è limitata. Se $f(x_n)\to\sup_D f=:L,\ n\to\infty,\ x_n\in D$ vi sono $c\in D$ e $x_{n_k}\to c,\ k\to\infty$: per continuità $f(x_{n_k})\to f(c)$ quindi per unicità del limite $L=f(c),\ c\in D$. Analogamente per il minimo.

Teorema 9: di Bolzano Weiestrass:

- un insieme compatto per successioni è *limitato ed anche chiuso per successioni*;
- *è vero il viceversa* per *sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^m$ con distanza top. equivalente a quella euclidea.

Dimostrazione : identica a quella per sottinsiemi di $\mathbf{R}^m$, FT5.

Esempio 13: *il viceversa* in generale è *falso*: sia $F\subset C[0;1]$, con distanza uniforme, fatto dalle $f_n(x)=x^n$, $n\in\mathbf{N}$: - - F è limitato rispetto alla distanza uniforme (contenuto nella palla di raggio 1 per la distanza uniforme) in quanto $\max_{[0;1]}|x^n|=\sup_{[0;1)}|x^n|=1$;

- - ogni sottosuccessione f_{n_k}, $n_k\uparrow\infty$, di f_n è *non convergente* per la distanza uniforme in quanto converge puntualmente ma non uniformemente su $[0;1)$ alla funzione nulla. Poichè ogni successione f_{n_k} di elementi di F, per cui n_k non sia limitata, definisce una sottosuccessione $f_{n_{k_h}}$, $n_{k_h}\uparrow\infty$ di f_n, si ottiene che F non è seq. compatto per la distanza uniforme.
- - Per lo stesso motivo F è chiuso rispetto alla distanza uniforme: infatti, non essendoci sottosuccessioni di f_n convergenti uniformemente, le uniche successioni in F convergenti uniformemente sono quelle definitivamente costanti uguali ad una delle $f_m\in F$.

Teorema 10: un'estensione del criterio di Weiestrass.

Siano $D\subseteq\mathbf{R}^M$ *aperto*, $f:D\to\mathbf{R}$ *semicontinua inferiormente.*

Se per qualche $p\in D$ si ha $\displaystyle\liminf_{\substack{x\in D\\ dist(x,\partial D)\to 0}} f(x)\ge f(p)$, $\displaystyle\liminf_{\substack{x\in D\\ |x|\mapsto\infty}} f(x)\ge f(p)$, allora

f ammette minimo su D.

Dimostrazione: per esercizio, suggerimento si provi che $\{x\in D: dist(x,\partial D)\ge\delta,\ |x|\le M|\}$ è chiuso e limitato.

4 Preimmagini di funzioni continue e proprietà globali.

Spesso sottoinsiemi interessanti sono unioni finite di soluzioni di sistemi di disequazioni, cioè unioni finite di intersezioni di sottolivelli o sopralivelli stretti o meno di funzioni. Per esempio:

$$\begin{cases} f_1^1(u) & \leq v_1^1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_{m_1}^1(u) & \leq v_m^1 \end{cases} \quad \text{o anche} \ldots \begin{cases} f_1^k(u) & \leq v_1^k \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_{m_k}^k(u) & \leq v_m^k \end{cases}$$

Nei casi più significativi se le funzioni $f^j : D_j \to \mathbf{R}^{m_j}$, $1 \leq j \leq k$ sono tutte continue e le diseguaglianze sono tutti o deboli o strette l'insieme risulterà rispettivamente chiuso o aperto.

Teorema 11: caratterizzazione mediante preimmagini delle funzioni continue.

- $f : A \to E$, $D \subseteq A$, è continua in $u \in D$ lungo D se e solo se la preimmagine di un intorno di $f(u)$ è un intorno di u relativo a D (cfr. FT2-2.3).

- $f : A \to E$, $D \subseteq A$, è continua in D se e solo se le preimmagini di sottoinsiemi aperti (chiusi) sono aperti (chiusi) relativi a D (cfr. FT2-2.3).

Dimostrazione: segue dalla defnizione 2.1-iv), e da quelle di aperto e chiuso (FT2-2).

Corollario. - Siano $f : D \subseteq A \to E$ e D *aperto* in A. Allora f è continua se e solo se la preimmagine di ogni aperto in E è aperta in A.

- Siano $f : D \subseteq A \to E$ e D *chiuso* in A. Allora f è continua se e solo se la preimmagine di ogni chiuso di E è chiusa in A.

Corollario. Siano $f : D \to E$ continua e D (seq.) compatto.
Se f è invertibile su D allora $f^{-1} : \mathrm{Im}_D f \to D$ è anch'essa continua. Ovvero:

f trasforma chiusi in chiusi.

Dim.: se $C \subseteq D$ è chiuso è seq. compatto essendolo D, prop. 2, quindi lo è la sua immagine continua $(f^{-1})^{-1}(C) = \mathrm{Im}_C f$, teo. 8, quindi chiusa, prop.2.

<u>Controesempio 14:</u> $f : D \to \mathbf{R}^3$, $D = \{(\cos t, \sin t, t) : \ t \in [0; 2\pi)\}$ (un pezzo di elica sul cilindro, nello spazio cartesiano tridimensionale, senza un estremo), $f(x, y, z) = (x, y, 0)$:

- f è invertibile da D su $\mathrm{Im}_D f$ che è una circonferenza unitaria S=$\{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0; 2\pi]\}$;
- Inoltre f è continua su D: $|(x, y, 0) - (u, v, 0)|_{\mathbf{R}^3} \leq |(x, y, z) - (u, v, w)|_{\mathbf{R}^3}$.
- La sua inversa g da S in D non è continua non essendo D seq. compatto poichè non chiuso:

$g(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, 0) = (\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (1, 0, 0)$ mentre

$g(\cos \left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin \left(2\pi - \frac{1}{n}\right), 0) = (\cos \frac{1}{n}, -\sin \frac{1}{n}, 2\pi - \frac{1}{n}) \to (1, 0, 2\pi)$,

pur convergendo le due successioni $(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, 0) \in S$ e $\left(\cos \left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin \left(2\pi - \frac{1}{n}\right), 0\right) \in S$ allo stesso valore $(1, 0, 0) \in S$.

<u>Controesempio 15:</u> cfr. esmpio 1 FT5-3.3 $f(t) = \left(te^{-t}, t^2 e^{-t}\right)$, $t \in \mathbf{R}$: f^{-1} non è continua poichè $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0, 0) = f(0)$. In effetti $\mathbf{R}$ non è limitato quindi non è seq. compatto.

Teorema 12: grafici delle funzioni continue.

Per (A, d), (E, d') spazi metrici, $d_\times((x, y), (a, b)) = d(x, a) + d'(y, b)$ è una distanza su $A \times E$.

Se $f : A \to E$ è continua allora Graf f è chiuso per $d_\times$.

Segue direttamente dalle caratterizzazioni di continuità e dei chiusi con le successioni.

- Il viceversa è falso $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$: Il suo grafico è unione di tre chiusi: $\{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$, $\{(x\frac{1}{x}) : x < 0\}$, $\{(0, 0)\}$.

Omeomorfismi

Omeomorfismi. Una funzione continua $f : D \to E$ ed invertibile si dice *omeomorfismo* tra $D = \mathrm{D}om f$ e $\mathrm{Im} f \subseteq E$ se la funzione inversa è anch'essa continua *su* $\mathrm{Im} f$.

5 Connessi e connessi per archi.

- Uno spazio metrcio E si dice connesso se quando sia *contenuto nell'unione* di due aperti *disgiunti e non vuoti* allora è *contenuto in uno solo di essi*.
- Un insieme E si dice connesso per archi se dati $p \in E$ e $q \in E$ vi è un cammino continuo $\gamma : [0;1] \to E$ (con immagine tutta contenuta in E) per cui $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.
- È una proprietà che riflette una nozione più forte, rispetto a quella di esser connesso, pur basandosi sulla stessa idea intuitiva di esser fatto "tutto di un pezzo" .

Proposizione 3: a - I sottoinsiemi *convessi* in uno spazio vettoriale normato sono *connessi per archi (per segmenti parametrici)*.
b - i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ connessi son gli intervalli (segmenti, rette e semirette).

Dimostrazione: a) se C è convesso dati due suoi punti p, $q \in C$ vi è un segmento interamente contenuto in C che li congiunge: $\gamma(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0;1]$ è il cammino desiderato.
b) Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ connesso. Dati $x \in A$, $y \in A$ con $x < y$ se per $z \in (x;y)$ fosse $z \notin A$ le due semirette aperte $(-\infty; z)$ e $(z; +\infty)$ ricoprerebbero A. Quindi A sarebbe contenuto in una sola di esse, per cui o x o y non starebbero in A.
Proposizione 4: Un connesso per archi è connesso.

Dimostrazione: sia (T, d) connesso per archi. Per assurdo siano A e B aperti *non vuoti, disgiunti* per cui $T = A \cup B$.
- Si considerano $a \in A$ e $b \in B$ e $\gamma : [0;1] \to T$ cammino continuo per cui $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.
- - Si considera $P = \{t \in [0;1] : \ \gamma(t) \in A\}$: per continuità di γ, teorema 11, P è un aperto relativo di $[0;1]$ non vuoto poichè $\gamma(0) = a \in A$.
- - Il complementare $[0;1] \setminus P = \{t \in [0;1] : \ \gamma(t) \notin A\}$ è $\{t \in [0;1] : \ \gamma(t) \in B\}$: per continuità di γ, teorema 11, $[0;1] \setminus P$ è un aperto relativo di $[0;1]$ non vuoto poichè $\gamma(1) = b \in B$.
- Si avrebbe che $[0;1]$ interseca due aperti non vuoti disgiunti che lo ricoprono.

Esempio: il sottoinsieme $S \subseteq \mathbf{R}^2$ unione del grafico G della funzione $\sin \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, con il punto $P = (0;0)$, con la restrizione della distanza euclidea, è connesso ma non lo è per archi:
- è connesso: se due aperti A e B disgiunti, $A \cap B = \emptyset$, non vuoti ricoprono S in particolare ricoprono G che è connesso per archi essendo il sostegno di un cammino continuo. Quindi G è interamente contenuto in uno dei due aperti: e.g. $G \subseteq A$. Se fosse $P \notin A$ dovrebbe essere $P \in B$, quindi un intero intorno di P sarebbe contenuto nell'aperto B. Ma ogni intorno di P interseca G. Si avrebbe in particolare che $\emptyset \neq B \cap G \subseteq A \cap B$. Assurdo.
- non è connesso per archi: un punto $A = (a, \sin \frac{1}{a})$ del grafico G non può esser collegato da un cammino continuo $\gamma : [0;1] \to S$ in S con $(0;0) \in S$. Un tale cammino dovrebbe avere immagine seq. compatta. Ma per arrivare a $(0;0)$ dovrebbe passare per i punti di S con ordinata 1 che scandirebbero una successione di S senza sottosuccessioni convergenti in S.
Proposizione 5: I sottoinsiemi aperti di $\mathbf{R}^M$ che sono connessi non solo sono anche connessi per archi ma due loro punti possono esser congiunti da un cammino fatto di segmenti paralleli agli assi cartesiani (connessi per poligonali cartesiane). *Dimostrazione:* esercizio.
Teorema 13: 1- Una funzione *continua trasforma connessi per archi in connessi per archi* (è la continuità della composta di due funzioni continue).
2- Trasforma *anche connessi in connessi* (preimmagini di aperti disgiunti non vuoti sono aperti disgiunti non vuoti).
3-Se (D, d) è connesso $f : (D, d) \to (E, d')$ è continua allora $Graff$ è connesso in $(D \times E, d_\times)$, $d_\times((x, y), (uv)) =_{\text{def}} d(x, u) + d'(y, v)$ $((x, f(x))$ è continua).
Corollario, valor medio: una funzione f continua definita su un connesso D a valori reali assume tutti i valori tra $\inf_D f$ e $\sup_D f$.

6 Generazione di funzioni continue

Il seguente teorema , in più punti, permette di riconoscere e costruire molte funzioni continue.
Generazione di funzioni continue 1): teorema di composizione.
1- $f : D \to E$, $g : E \to F$, d, d', d'' distanze rispettivamente su D, E, F, se f è continua in $u \in D$ e g è continua in $f(u) \in E$ lungo Imf allora $g_\circ f : D \in F$ è continua in u.
2- Inoltre composizione di funzioni uniformemente continue lo è.
Dim. cfr. teo.4, 6.

Generazione di funzioni continue 2): prodotto cartesiano di funzioni
si ricorda la definizione delle distanze prodotto equivalenti su $E_1 \times \cdots \times E_m$ (cfr. FT2 1.1)
$d_{\times_1}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_m(x_m, y_m)$,
$d_{\times_\infty}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_m(x_m, y_m)\}$,
$d_{\times_2}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, y_m))^2}$
Se $f_1 : D \to E_1,\ \ldots, f_m : D \to E_m$, d_i distanza su $E_i \quad 1 \le i \le m$, se $f_1, \ldots, f_m$ sono continue in u allora, sempre per la diseguaglianza per componenti, anche $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to E_1 \times \ldots E_m$ è continua in u, avendo il codominio una delle distanze prodotto.
Dim.: basta provarlo con $d_{\times_1}$, quindi è immediato essendo somma di infinitesimi infinitesima.

Generazione di funzioni continue 3): continuità uniforme delle funzioni lineari tra spazi cartesiani, (polinomi di primo grado).
$c \in \mathbf{R}$, $v = (v_1, \ldots, v_M) \in \mathbf{R}^M$, $f : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle x \cdot v \rangle + c = x_1 v_1 + \cdots + x_M v_M + c$.
Poichè $\quad |f(x) - f(y)| = |\langle (x - y) \cdot v \rangle| \le |v|_M |x - y|_M, \quad$ la f è *uniformemente continua.*

<u>Osservazione:</u> - in particolare le coordinate $\pi_i(x_1, \ldots, x_M) = x_i$, $1 \le i \le M$, sono continue.

- In particolare ogni combinazione lineare $F(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$, di funzioni, $f,\ g : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, continue è continua. Infatti $S : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $S(u, v) = \lambda u + \mu v$ è lineare e quindi continua per 2) e 3), $V : D \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, $V(x) = (f(x), g(x))$ è continua per ipotesi e per 2). Ma $F(x) = S(V(x))$ e quindi per 1) è continua.

Funzioni Hölderiane e Lipschitziane: Con egual ragionamento se vi è $\alpha \in (0; 1]$ per cui:
$\sup\limits_{x,\ y \in D} \dfrac{d'(f(x), f(y))}{(d(x, y))^\alpha} = L < +\infty$ la funzione f è *uniformemente continua su* D.
- Se $\alpha = 1$ la f si dice *Lipschitziana* su D: ha cioè *"rapporti incrementali" limitati* su D.
- I numeri L ed α si dicono rispettivamente costante ed esponente di Hölderianità.

Generazione di funzioni continue 4): continuità prodotti.
$P : \mathbf{R}^M \times \to \mathbf{R}$, $P(x) = P(x_1, \ldots, x_M) = x_i x_j$. Fissato $u = (u_1, \ldots, u_M)$, poichè

$$|P(x) - P(u)| = |x_i x_j - u_i u_j| = |(x_i - u_i) x_j - u_i(u_j - x_j)| \le |x_i - u_i||x_j| + |u_i||u_j - x_j|,$$

- essendo u fisso, per la diseguaglianza per componenti, se $|u - x|_M$ è piccolo a sufficienza tale sarà l'ultimo addendo essendolo $|u_j - x_j|$.
- Per vedere che il primo addendo è piccolo quando lo sia $|x - u|_M$ si argomenta similmente:
- - se $|u - x|_M$ è piccolo lo si suppone minore di 1 e in particolare
- - lo saranno sia $|x_j - u_j|$ che $|x_i - u_i|$, ottenendo quindi $|x_j| \le |u_j| + 1$.
Quindi anche il primo addendo sarà piccolo quando $|u - x|_M$ è piccolo. Pertanto P risulta continua in u.
<u>Osservazione:</u> - iterando prodotti si ha che i *monomi* in M variabili $x_1^{n_1} \cdot \ldots x_M^{n_M}$ definiscono funzioni continue. Da 3) e 4) segue che i *polinomi* in M variabili definiscono funzioni continue.

Continuità bilineari dominate: con lo stesso calcolo ed lo stesso argomento si mostra che se U, V, W sono spazi vettoriali con norme rispettivamente $|\cdot|_U$, $|\cdot|_V$, $|\cdot|_W$, e $P : U \times V \to W$ è una funzione bilineare per cui vi è $C \in \mathbf{R}$ e $|u \cdot_P w|_W \leq C|u|_U|v|_V$ (cioè $\sup_{u\in U, v\in V} \dfrac{|u \cdot_P w|_W}{|u|_U|v|_V} < \infty$),
allora P è continua avendo il dominio la distanza prodotto:
$|x \cdot y - u \cdot v|_W = |(x-u)\cdot y - u\cdot(v-y)|_W \leq |(x-u)\cdot y|_W + |u\cdot(v-y)|_W \leq$
$\leq C(|x-u|_U|y|_V + |u|_U|v-y|_V)$.

Esempi: 1- in uno spazio metrico (M, d) la distanza da un fissato punto $p \in M$, $f(x) =: d(x, p)$, è una funzione Lipschitziana: $|d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$.

- In particolare una norma $| \ |_U$ su uno spazio vettoriale U è una funzione uniformemente continua rispetto alla distanza da essa definita: è infatti Lipschitziana con costante $L = 1$:

$$||x|_U - |y|_U| \ \leq \ |x-y|_U$$

- Nel caso della norma euclidea si prova la sua continuità anche osservando che $|x|_M = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_M^2}$: è composizione di $R : [0; +\infty) \to \mathbf{R}$, $R(t) = \sqrt{t}$ con il polinomio $P : \mathbf{R}^M \to [0; +\infty)$, $P(x) = x_1^2 + \cdots + x_M^2$.

2 - Per (M, d) metrico $d : (M\times M, d_\times) \to \mathbf{R}$, è continua: $|d(x, y)-d(a, b)| \leq \sqrt{2}d_{\times_2}((x, y), (a, b))$.
- Il prodotto scalare euclideo $\langle \ \cdot \ \rangle : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M \sim \mathbf{R}^{2M} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua essendo definito da un polinomio di $2M$ variabili.
Alternativamente si deduce la continuità per bilinearità come sopra osservato:

$$|\langle x \cdot y\rangle - \langle u \cdot v\rangle| = |\langle (x-u)\cdot y\rangle - \langle u \cdot (v-y)\rangle| \leq |x-u||y| + |u||v-y|.$$

Osservazione: se U e V sono spazi vettoriali con prodotti scalari rispettivi $\langle \ \cdot \ \rangle_U$ e $\langle \ \cdot \ \rangle_V$, allora $\langle (u, v)\cdot(u', v')\ \rangle_\times = \langle u\cdot u'\rangle_U + \langle v \cdot v'\rangle_V$ è un prodotto scalare su $U \times V$ che definisce la distanza prodotto $\times_2$ delle distanze su U e V.

Generazione di funzioni continue 5):
separata continuità uniforme rispetto ad una variabile.
Siano $f : E \times F \to G$, (E, d), (F, d'), $(G, \widetilde{d})$ spazi metrici, $(a, b) \in E \times F$. Se vi è $r > 0$:

$$x \mapsto f(x, b) \text{ è continua in } a,$$

$$y \mapsto f(z, y) \text{ sono continua in } b \text{ uniformemente rispetto a } z \text{ che varia in } B_d(a, r), \text{ cioè:}$$

$$\sup_{d(z,a)<r} \widetilde{d}(f(z, y), f(z, b)) \xrightarrow{y\to b} 0,$$

allora f è continua in (a, b), equivalentemente per una delle distanze prodotto su $E \times F$.

Dimostrazione: sia x per cui $d(x, a) < r$, allora
$\widetilde{d}(f(x, y), f(a, b)) \leq \widetilde{d}(f(x, y), f(x, b)) + \widetilde{d}(f(x, b), f(a, b)) \leq$
$\leq \sup_{d(z,a)<r} \widetilde{d}(f(z, y), f(z, b)) + \widetilde{d}(f(x, b), f(a, b))$
passando al limite per $d(x, a) + d'(y, b) \to 0$ la tesi.

Corollario: Siano $f : E \times F \to G$, (E, d), (F, d'), $(G, \widetilde{d})$ spazi metrici, se
$x \mapsto f(x, y)$ sono continue per ogni $y \in Y$
$y \mapsto f(x, y)$ sono Hölderiane di egual costante per ogni $x \in X$ allora f è continua.

Controesempio 16: $f(x, y) = \begin{cases} (\sin(4\pi \dfrac{y}{x^2}))^2 & \text{se } x^2 < 2y < 2x^2, \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$.

Funzione con: restrizioni a rette continue in tutti i punti, continua nei punti diversi da $(0, 0)$ ma non continua in $(0, 0)$. A parte l'origine è costante sulle parabole definite da $y = ax^2$.

7 Funzioni convesse e continuità, cfr. FT3

Lemma C1 Se f è convessa e limitata da K sulla palla $\overline{B(p,R)}$, ed $r < R$ allora f è Lipschitziana di costante $\dfrac{2K}{R-r}$ su $\overline{B(p,r)}$.

Dimostrazione: si pone $\delta = R - r$ e $B = \overline{B(p,r)}$.
L'idea è che dati x, $z \in B$ la retta che passa per i punti del grafico $(x, f(x))$ e $(z, f(z))$ non può essere troppo inclinata (e questo con una certa uniformità rispetto alla direzione di $x-z$) poichè (cfr. FT3 proposizione 3.2) le semirette esterne al segmento di estremi $(x, f(x))$ e $(z, f(z))$ quando "passano sopra" $\partial B(p,R)$ non possono avere "ordinata" maggiore di K o minore di $-K$.
- - Sia $u = z + \dfrac{\delta}{|z-x|}(z-x)$. Per la diseguaglianza triangolare si ha $|u| \le |z| + \delta \le r + \delta = R$. Per cui $f(u) \le K$.
- - Si ha $z = \dfrac{\delta}{|z-x|+\delta}x + \dfrac{|x-z|}{|z-x|+\delta}u$.
- - Quindi per convessità $f(z) \le \dfrac{\delta}{|z-x|+\delta}f(x) + \dfrac{|x-z|}{|z-x|+\delta}f(u)$, per cui sottraendo $f(x)$:

$$f(z) - f(x) \le \frac{|z-x|}{|z-x|+\delta}\left(f(u) - f(x)\right) \le \frac{|z-x|}{\delta}\left(f(u) - f(x)\right) \le |z-x|\frac{2K}{\delta}.$$

simmetricamenete scambiando x con z si ottiene quanto voluto con $L = \dfrac{2K}{R-r}$.

Lemma C2 Se f è convessa su un convesso di $\mathbf{R}^N$, allora per ogni punto dell'interno relativo del suo domino esiste un intorno in cui è limitata superiormente. Più precisamente è limitata superiomente su ogni cubo chiuso contenuto nel suo dominio. (cfr. teorema 7 FT3).

Dimostrazione, traccia: sia M la dimensione del sostegno affine del dominio di f, e si consideri un C cubo chiuso M-dimensionale centrato in p e con vertici contenuti nel dominio convesso di f (in particolare il cubo senza facce e p sono nell'interno relativo del dominio).
- Per induzione sulla dimensione M si prova che una funzione convessa è limitata da $\max f(v_i)$ su ogni cubo M dimensionale con vertici $v_1, \ldots, v_{2^M}$ nel dominio.
Per $M = 1$ si consideri un intervallo chiuso $C = [a; b]$ contenuto nel dominio e centrato in p: essendo il grafico sotto la corda di estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, la funzione è limitata superiormente dal massimo tra $f(a)$ ed $f(b)$.
Per il passo induttivo: si consideri un vertice v per cui $f(v) = \max f(v_i)$. Se $q \in C$, la retta per q e v interseca la frontiera del cubo in un altro punto z, che quindi appartiene a qualche cubo $(M-1)$-dimensionale che è una faccia di C. Si ha $q = \lambda z + (1-\lambda)v$, per convessità $f(q) \le \lambda f(z) + (1-\lambda)f(v)$. Per ipotesi induttiva $f(z) \le max_{v_i \neq v} f(v_i) \le f(v)$, per cui $f(q) \le f(v)$.

Corollario se f è convessa su un convesso di $\mathbf{R}^N$, allora per ogni punto p dell'interno relativo del suo domino esiste un intorno in cui è limitata.

Dimostrazione: si è dimostrato che la funzione è limitata superiormente, da un certo K, in un intorno cubico C di centro p. Dato $q \in C$ se ne considera il simmetrico rispetto a p: $z = 2p - q$. In particolare $f(z) \le K$. Si ha $p = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}q$, per convessità $f(p) \le \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(q)$ quindi $2f(p) - K \le f(q)$.

Teorema C1 Data funzione f su un insieme $C \subseteq$ convesso di $\mathbf{R}^N$, allora
1 - f è continua sulla parte interna relativa di C,
2 - anzi è *localmente Lipscitziana* nella parte interna relativa: cioè: per ogni $r > 0$ e p interno relativo a C per cui $\overline{B(p,r)} \cap C \subseteq int_{rel}C$ allora vi è $L = L(p,r)$ per cui

$$|f(x) - f(z)| \le L|x-z|_{\mathbf{R}^N}, \ \forall x, \ z \in \overline{B(p,r)} \cap C.$$

Dimostrazione: restringendo f al sostegno affine del suo dominio convesso ci si riduce al caso di un convesso con parte interna non vuota in $\mathbf{R}^N$ $(M = N)$. Sia quindi p interno a C.
1 - Si prova prima che dato p vi è $r > 0$ per cui $B(p, r) \subset C$ e vi è L per cui f è *Lipscitziana* di costante L su tale palla, ottenendo così che f è continua in C^0.
- - Siano: Q un cubo di centro p contenuto nel dominio di f, R per cui $\overline{B(p, R)} \subset Q^o$, $r \in (0; R)$ e $\delta = R - r$. Per il corollario $|f|$ è limitata da un certo K su Q e quindi su $\overline{B(p, R)}$ e $B = \overline{B(p, r)}$. Si usa quindi il lemma C1.

2 - Per dimostrare la seconda parte:
- - se $r > 0$ e $B = \overline{B(p, r)} \subset C^o$, allora vi è $R > r$ per cui anche $\overline{B(p, R)} \subset C^o$;
- - per quanto ora dimostrato f è continua su $\overline{B(p, R)}$ compatto, quindi per il teorema di Weiestrass f è limitata su tale palla chiusa: per il lemma C1 è quindi lipschitziana su $\overline{(p, r}$ con costante $\dfrac{2 \max_{\overline{B(p,R)}} |f|}{R - r}$.

8 Coordinate polari, e sferiche cfr. FT1-5.

Coordinate polari: - $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è una funzione continua.

- Restringendosi a $(0; +\infty) \times [0; 2\pi)$ si ottiene

una bigezione tra tale striscia e $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

La sua inversa *non è continua* nei punti $(x, 0)$, $x > 0$.

- Restringendosi ulteriomente a $(0; +\infty) \times (0; 2\pi)$ si ottiene un omeomorfismo tra tale striscia ed $\mathbf{R}^2 \setminus [0; +\infty) \times \{0\}$ (il piano privato della semiretta non negativa dell'asse delle ascisse).

$$\begin{cases} x(r, \phi) = r \cos \phi \\ y(r, \phi) = r \sin \phi \end{cases}.$$

Coordinate sferiche "geografiche":

$$- \ f(r, \phi, \theta) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,$$

è una funzione continua.

- Restringendosi a $(0; +\infty) \times (-\pi; \pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ si ha la bigezione:

$$f : (0; +\infty) \times (-\pi; \pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\},$$

$$\begin{cases} x(r, \phi, \theta) = & r \cos \theta \cos \phi \\ y(r, \phi, \theta) = & r \cos \theta \sin \phi \ . \\ z(r, \phi, \theta) = & r \sin \theta \end{cases}$$

La sua inversa non è continua nei punti $(x, 0, z)$, $x < 0$ (semipiano meridiano).

- Restringendossi ulteriormente a $(0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ si ottiene un omeomorfismo tra tale semicilindro illimitato a base erttangolare e $\mathbf{R}^3 \setminus (-\infty; 0] \times \{0\} \times \mathbf{R}$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

LIMITI E CONTINUITA' PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

[FS] pagg. 35-41, 81-83.

[B] pagg. 247-255.

[F] pagg. 121-125.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.332, per funzioni continue pag.333-334 e distanza L2.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a(8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97, Aperti connessi pagg. 112-114.