RICERCA DI ZERI

Note Title 2021-10-06

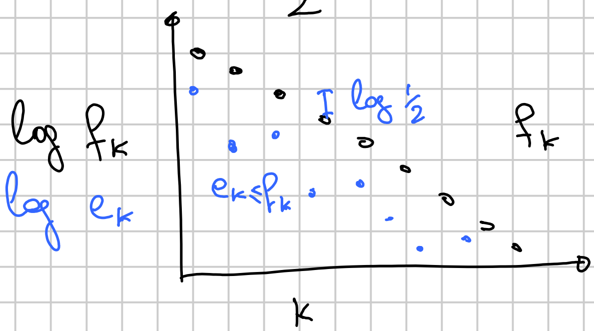
Lez. scorsa: metodo di bisezione

$f \in C^0([a,b])$ $\quad f(a)f(b) < 0$

convergenza garantita $\qquad$ 2 criteri di arresto (ampiezza di $b_k - a_k$ oppure $|f(x_k)|$)

convergenza quasi lineare: $e_k = |x_k - x_*| \leq f_k$

e $f_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ $\quad$ è tale che $\quad \dfrac{f_{k+1}}{f_k} = \dfrac{1}{2}$



Metodo del punto fisso (o di iterazione funzionale)

Scopo: trovare x_* t.c. $f(x_*) = 0$ $\qquad$ "zero di f"

Vogliamo riscrivere come $\quad x_* = \Phi(x_*)$ $\quad$ per una certa funzione Φ

$$f(x) = 0 \iff x = \underbrace{x + f(x)}_{\Phi(x)}$$

ES: $x^3 - 2 = 0 \qquad f(x) = x^3 - 2 \qquad f(x_*) = 0 \iff x_* = \sqrt[3]{2}$

$$x = \underbrace{x^3 + x - 2}_{\Phi(x)}$$

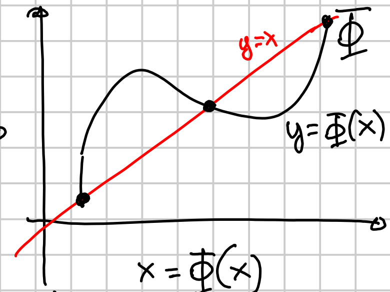
Ci sono infiniti altri modi di riscrivere il problema in questa forma, ad es.

$$x = \boxed{x - \frac{x^3 - 2}{2}} \ \Phi(x) \iff x^3 - 2 = 0$$

$$x = \boxed{\frac{2}{x^2}} \ \Phi(x) \qquad \iff x^3 - 2 = 0$$

Una trasformazione di questo tipo trasforma il problema in un problema di punto fisso: trovare x_* t.c. $\Phi(x_*) = x_*$

3 soluzioni al problema di punto fisso $\rightarrow$



$x = \Phi(x)$

Possibile modo di approssimare la sol. di questo problema:

dato x_0, calcolo

$$x_1 = \Phi(x_0), \qquad x_2 = \Phi(x_1) = \Phi(\Phi(x_0)) \qquad x_3 = \Phi(x_2) = \Phi(\Phi(\Phi(x_0))), \dots$$

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_{k+1} = \Phi(x_k) & k = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

se la successione $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ è ben definita e converge a un certo valore x_*, allora passando al limite entrambi i lati abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k)$$

sol. del problema di pto fisso $\rightarrow$ $x_* = \Phi(x_*)$ se $\Phi \in C^0([a,b])$

"ben definita": se ho $\Phi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, allora potrebbe succedere che per un certo $k \geq 0$ si ha $x_{k+1} = \Phi(x_k) \notin [a,b]$ $\Rightarrow$ $\Phi(x_{k+1})$ non è definito

---

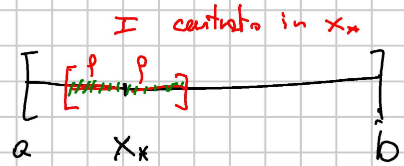
Teo: Sia $\Phi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1, e $x_* \in (a,b)$ punto fisso di Φ (cioè, $x_* = \Phi(x_*)$).

ip. Supponiamo che esista un intervallo $I = [x_* - \rho, x_* + \rho] \subseteq [a,b]$ tale che per ogni $x \in I$ $|\Phi'(x)| < 1$.

Allora, per ogni $x_0 \in I$ si ha che

- $x_k \in I$ per ogni $k = 0,1,2,3,\dots$ $\rightarrow$ ben definita
- $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$ $\rightarrow$ converge a x_*

Dim: Definiamo $L = \max_{x \in I} |\Phi'(x)|$.



Questo massimo esiste per il teo. Weierstrass: una funzione continua su un insieme compatto (chiuso e limitato) ammette massimo.

$I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ chiuso e limitato

$|\Phi'(x)|$ funzione continua perché composizione di $|\cdot|$ (continua) e $\Phi'(x) \in C^0$ perché $\Phi \in C^1$

Inoltre, $L < 1$ (perché è raggiunto in un punto $x \in I$ t.c. $|\Phi'(x)| < 1$)

Vogliamo dimostrare per induzione su $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ che

$$|x_k - x_*| \leq L^k \rho \qquad (\star)$$

$\boxed{k=0}$: $(\star)$ diventa $|x_0 - x_*| \leq \rho \iff x_0 \in [x_* - \rho, x_* + \rho] = I$. ✓

$\boxed{\text{supponiamo } (\star) \text{ vera per un certo } k, \text{ dimostriamolo per } k+1}$:

$$|x_{k+1} - x_*| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_*)| = |\Phi'(\xi_k) \cdot (x_k - x_*)| = \dots \quad \leftarrow (1)$$

vera per un certo ξ_k compreso tra x_k e x_* per il teorema di Lagrange: data $f \in C^1([a,b])$, esiste $\xi \in (a,b)$ t.c. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

$$\dots = \underbrace{|\Phi'(\xi_k)|}_{\leq L} \cdot \underbrace{|x_k - x_*|}_{\leq L^k \rho} \leq L \cdot L^k \rho = L^{k+1} \rho$$

✓ termina dimostrazione per induzione

perché ξ_k compreso tra x_k e x_*, e questi stanno entrambi dentro I

per ipotesi induttiva $(\star)$

$x_k \in I$ vera perché $|x_k - x_*| \leq L^k \rho \leq \rho$ perché $L < 1$

Dalla $\star$ segue che:

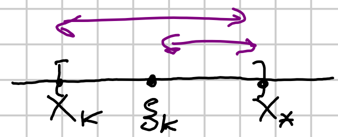
- $x_k \in I$ perché $|x_k - x_*| \leq L^k \rho \leq \rho \Leftrightarrow x_k \in I$ per $L<1$ ✓
- $\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq |x_k - x_*| \leq \underbrace{L^k \rho}_{\downarrow 0}$, quindi $x_k \to x_*$ per il teo. dei carabinieri. ✓ $\square$

Il metodo converge (almeno) linearmente.
Definito $e_k = |x_k - x_*|$, sotto le stesse ipotesi possiamo dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = |\Phi'(x_*)| < 1$$

$\longrightarrow$ vero perché $x_* \in I$

dim: dalla formula (1) segue che



$$\frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = |\Phi'(\xi_k)|$$

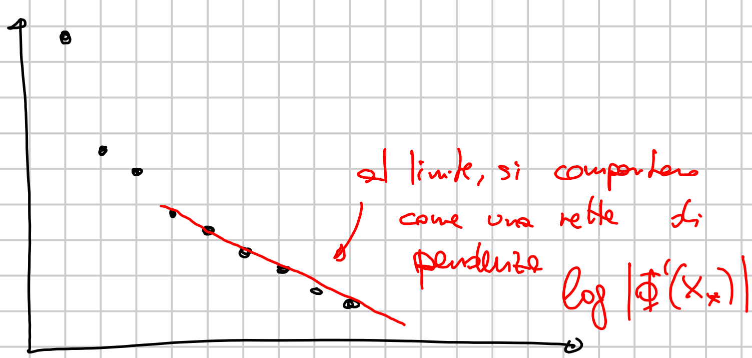
Vogliamo ora passare al limite per $k \to \infty$
$x_k \to x_*$, inoltre $\underbrace{0}_{\to 0} \leq |\xi_k - x_*| \leq \underbrace{|x_k - x_*|}_{\to 0}$
da cui segue per il teo. carabinieri che $\xi_k \to x_*$.

Quindi,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = \lim_{k\to\infty} |\Phi'(\xi_k)| = |\Phi'(x_*)|. \quad \square$$

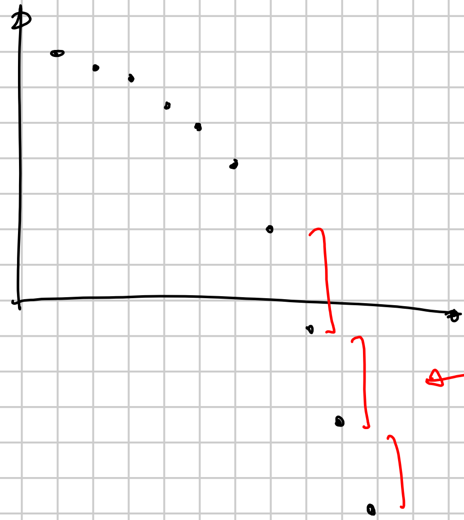
Quindi, gli errori e_k al limite si comportano come una successione geometrica:

$$e_{k+1} \approx e_k \cdot |\Phi'(x_*)|$$



"convergenza lineare". Può succedere che $\Phi'(x_*) = 0$.
In questo caso gli errori si comportano al limite come una retta

"di pendenza $-\infty$", cioè tendono ad allinearsi verticalmente:

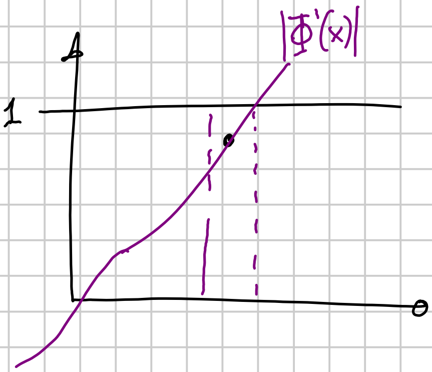


Quando questo succede, il metodo converge più velocemente di qualunque retta $\Rightarrow$ "convergenza superlineare"

Osservazione: supponiamo che $\Phi \in C^1([a,b])$ e che $\Phi(x_*) = x_*$ per un $x_* \in (a,b)$. Se $|\Phi'(x_*)| < 1$, allora esisterà un intervallo (magari piccolissimo) $I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ tale che

$$|\Phi'(x)| < 1 \text{ per ogni } x \in I$$

(per continuità di $|\Phi'(x)|$)



$\Rightarrow$ si ha il risultato del teo. precedente.

Corollario: se $\Phi \in C^1([a,b])$, $x_* \in (a,b)$ tale che $\Phi(x_*) = x_*$, e se $|\Phi'(x_*)| < 1$, allora esiste $\rho > 0$, $I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ tale che per ogni $x_0 \in I$,

- $x_k \in I \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $\lim_{k \to \infty} x_k = x_*$.

"convergenza locale" del metodo

Svantaggi:
- ipotesi più forti del metodo di bisezione:
$$\Phi \in C^1, \quad |\Phi'(x_*)| < 1$$
- convergenza garantita solo se x_0 "abbastanza vicino"

alla soluzione. Non c'è un criterio semplice per dire quanto è "abbastanza vicino"

Vantaggi: semplice da implementare:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = \Phi(x_k) \end{cases}$$

- costo: 1 valutazione della Φ per passo (come bisezione)
- convergenza lineare, e in alcuni casi ($\Phi'(x_*)=0$) anche più veloce

---

Esempi di funzioni all'inizio della lezione: cerco uno zero di

$f(x) = x^3-2$ (cioè, cerco di calcolare $x_* = \sqrt[3]{2}$)

1) $x^3-2=0 \iff x = \underbrace{x^3+x-2}_{\Phi(x)}$

$\Phi'(x) = 3x^2+1$ $\qquad \Phi'(x_*) = 3\sqrt[3]{2}+1 > 1$

⇝ non esiste un intervallo I che soddisfa le ip. del teorema.

⇒ la successione definita da $\begin{cases} x_0 \text{ qualunque} \\ x_{k+1} = \Phi(x_k) = x^3+x-2 \end{cases}$

non converge a x_*

2) $x = x - \dfrac{x^3-2}{2} \iff x^3-2=0$

$x = \underbrace{x + c\cdot(x^3-2)}_{\Phi(x)} \iff x^3-2=0$ per ogni $c \neq 0$

$\Phi'(x) = 1+3cx^2$

$\Phi(x_*) = 1+3c(\sqrt[3]{2})^2$ ⇝ per quali c viene <1?

Per esempio, $c = -\frac{1}{6}$ dovrebbe funzionare:

Il metodo ottenuto con $\boxed{\Phi(x) = x - \frac{1}{6}(x^3-2)}$ unica Φ che ci dà conv. locale

converge localmente: esiste un intervallo I centrato in $x_* = \sqrt[3]{2}$

tale che $x_0 \in I \Rightarrow x_k \in I \quad k = 0,1,2,3\ldots$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_*$$

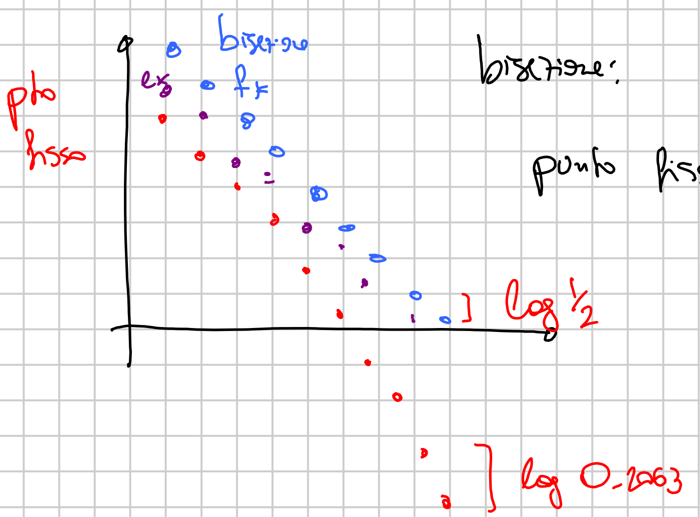
3) $x^3 - 2 = 0 \iff x = \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\Phi(x)} = 2x^{-2}$

$$\Phi'(x) = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} \qquad \Phi'(x_*) = -\frac{4}{x_*^3} = -\frac{4}{2} = -2$$

$|\Phi'(x_*)| = 2 > 1 \Rightarrow$ non possiamo dimostrare conv. locale

---

Con $\Phi(x) = x - \dfrac{x^3 - 2}{6}$, abbiamo $|\Phi'(x_*)| = 0.2063$



bisezione: $e_k \leq f_k$ con $\dfrac{f_{k+1}}{f_k} = \dfrac{1}{2}$

punto fisso: $\dfrac{e_{k+1}}{e_k} = 0.2063$

errore si riduce a circa $\frac{1}{5}$ ad ogni passo.