Metodo di Newton - II

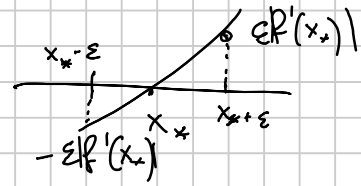
Note Title 2021-10-13

Criteri di arresto?

Come per il metodo di bisezione, abbiamo visto che

se un punto x sta in $[x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$, allora $f(x)$, a meno di termini che sono $O(\varepsilon^2)$, sta in

$$\left[\underbrace{f(x_*)}_{=0} - \varepsilon|f'(x_*)|, \underbrace{f(x_*)}_{=0} + \varepsilon|f'(x_*)|\right]$$



e quindi $\left|\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right| \dot{\leq} \varepsilon$ (sempre al primo ordine)

Questo suggerisce un criterio di arresto: mi fermo quando $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \leq \varepsilon$.

Ma visto che $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, questo è equivalente a dire che mi fermo quando $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ "criterio dell'incremento"

⚠ possibile cancellazione, meglio usare $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|$

Volta scorsa: se applichiamo il metodo di Newton a $f(x) = x^2$ l'ipotesi $f'(x_*) \neq 0$ non è verificata, e il metodo converge solo linearmente. (difatti veniva $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$)

$m \in \mathbb{N}$

Def: una funzione $f(x)$ ha uno zero di molteplicità esattamente m in x_* se si scrive come $f(x) = (x - x_*)^m g(x)$, dove $g(x)$ è una funzione tale che $g(x_*) \neq 0$.

Es: $f(x) = \underbrace{(x-1)^3}_{(x-x_*)^3} \underbrace{(x-2)^5}_{g(x)}$, $f(x)$ ha uno zero in $x_* = 1$ di molteplicità $m = 3$

ES: $f(x) = x^2 \sin(x)$

$= \underbrace{x^3}_{(x-x_*)^3} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{g(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$

che posso estendere per continuità a $g(0) = 1$

$f(x)$ ha uno zero in $x_* = 0$ di molteplicità non 2 (perché $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ma $\sin(x)$ si annulla in $x=0$) bensì 3.

Lemma: se $g(x)$ è derivabile almeno m volte, allora la funzione

$f(x) = (x-x_*)^m g(x)$ soddisfa

$$0 = f(x_*) = f'(x_*) = f''(x_*) = \dots = f^{(m-1)}(x_*), \quad \text{ma } f^{(m)}(x_*) \neq 0$$

Quindi, ad es. $0 = f(x_*)$, $f'(x_*) \neq 0 \to$ molteplicità 1 (zero semplice)

$0 = f(x_*) = f'(x_*)$, $f''(x_*) \neq 0 \to$ molteplicità 2

$\vdots$

Ad es. $f(x) = x^2$ è tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ $f''(0) \neq 0$

$f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$

Per studiare la convergenza del metodo di punto fisso $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, dobbiamo guardare $|\Phi'(x_*)|$: se è $=0$, convergenza di ordine più grande di 1,

se è $\neq 0$ (e compreso in $(-1,1)$, converg. lineare)

Il metodo di Newton è il metodo di punto fisso con $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Se f ha uno zero di molteplicità $m > 1$, allora

$$\Phi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{(x-x_*)^m g(x) \left[m(m-1)(x-x_*)^{m-2} g(x) + 2m(x-x_*)^{m-1} g'(x) + (x-x_*)^m g''(x) \right]}{\left[m(x-x_*)^{m-1} g(x) + (x-x_*)^m g'(x) \right]^2}$$

$f(x) = (x-x_*)^m g(x)$

$f'(x) = m(x-x_*)^{m-1} g(x) + (x-x_*)^m g'(x)$

$f''(x) = m(m-1)(x-x_*)^{m-2} g(x) + 2m(x-x_*)^{m-1} g'(x) + (x-x_*)^m g''(x)$

$$= \frac{\cancel{(x-x_*)^{2m-2}}}{\cancel{(x-x_*)^{2m-2}}} \cdot \frac{g(x)\left[m(m-1)g(x) + 2m(x-x_*)g'(x) + (x-x_*)^2 g''(x)\right]}{\left[m g(x) + (x-x_*)g'(x)\right]^2}$$

$$\Phi'(x_*) = \frac{\cancel{g(x_*)}\, m(m-1)\,\cancel{g(x_*)}}{m^2 \cancel{g(x_*)^2}} = \frac{m-1}{m} < 1$$

il metodo di Newton converge solo linearmente se $m > 1$

Metodo di Newton modificato:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \boxed{m} \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Di nuovo un metodo di punto fisso con $\Phi(x) = x - m \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$\Phi'(x_*) = 0$ per una funzione $f(x) = (x-x_*)^m g(x)$ con uno zero di molteplicità esattamente m.

(non facciamo il conto)

Risultato: il metodo di Newton modificato converge (almeno) quadraticamente se x_* è uno zero di molteplicità esattamente m di $f(x)$.

ES: su $f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5$, vorrò usare $\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - 3 \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$

per calcolare lo zero $x_* = 1$.

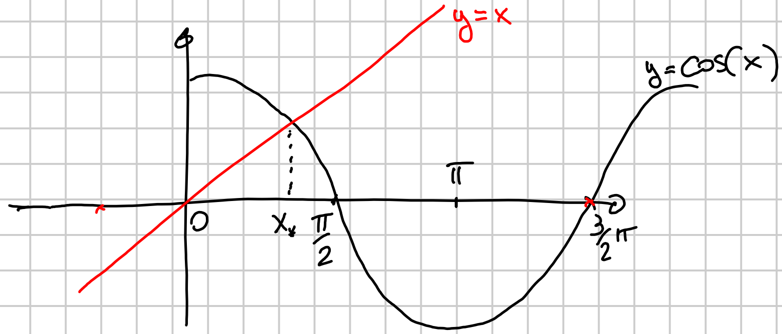
Esercizio: Consideriamo il metodo di punto fisso $\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = \cos(x_n) \end{cases}$

per calcolare uno zero della funzione $f(x) = x - \cos(x)$ $\quad \Phi(x) = \cos(x)$

1) Quante soluzioni positive ha $f(x) = 0$
2) Sappiamo individuare per quali intervalli I si applica il teorema del punto fisso?
3) Per quali valori iniziali x_0 questo metodo converge?

---

1) Gli zeri di $x - \cos(x)$ corrispondono ai punti di intersezione del grafico di $y = x$ e di $y = \cos(x)$



Voglio mostrare che esiste una soluzione x_* di $f(x)=0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$.

$f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$

$f(0)f(\frac{\pi}{2})<0 \Rightarrow$ intervallo di separazione

$f \in C^0$, quindi esiste (almeno) un punto $x_* \in (0, \frac{\pi}{2})$ tale che $f(x_*)=0$

Questo punto x_* è unico? Mi basta vedere la derivata di f:

$f(x) = x - \cos(x)$ $\qquad f'(x) = 1 + \sin(x)$ $\rightsquigarrow$ strettam. positiva per $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

In particolare, $f'(x) > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x)$ crescente.

$\Rightarrow$ esiste un solo punto $x_* \in (0, \pi/2)$ con $f(x_*)=0$

Possono esistere altri zeri in $[\frac{\pi}{2}, \infty)$? No, perché per $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$

$$f(x) = x - \cos(x) \geq \frac{\pi}{2} - 1 = 1{,}57\ldots - 1 > 0$$

perché $x \geq \frac{\pi}{2}$, $-\cos(x) \geq -1$

2) Ricordiamo il teo. del pto fisso:

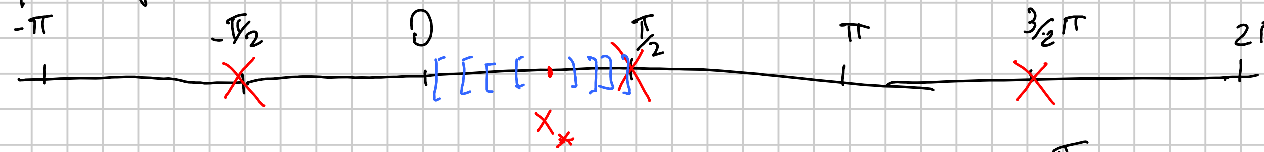
$\Phi \in C^1([a,b])$ ✓ $\qquad x_* \in (a,b)$ ✓ Se esiste $\rho > 0$, $I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ tale che $\boxed{|\Phi'(x)| < 1 \quad \forall x \in I,}$ allora per ogni $x_0 \in I$ il metodo $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \end{cases}$

- $x_k \in I$ per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$
- $\lim_{k \to \infty} x_k = x_*$

$\Phi(x) = \cos(x)$ $\qquad \Phi'(x) = -\sin(x)$ $\qquad$ Per quali valori ho $|\Phi'(x)| < 1$?

Basta che $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Quindi il mio intervallo $I=[x_*-\rho,\ x_*+\rho]$ non dovrà contenere nessuno di questi punti:



$\Rightarrow$ Vanno bene tutti gli intervalli che soddisfano $x_*+\rho<\frac{\pi}{2}$, $x_*-\rho>-\frac{\pi}{2}$

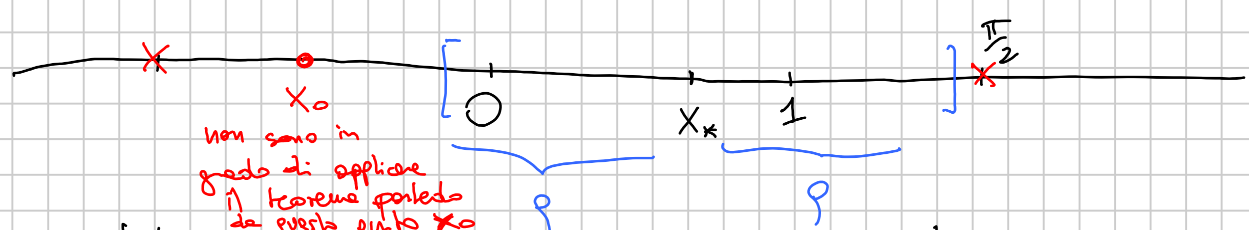
Visto che $x_*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, la condizione che ci dà un intervallo di ρ valido più stretto è la prima.

$\Rightarrow$ Il teo. del punto fisso si applica a tutti gli intervalli
$I=[x_*-\rho,\ x_*+\rho]$ con $\rho<\frac{\pi}{2}-x_*$

Matlab: $x_*\approx 0.7391$, 1.5708

$\Rightarrow$ il teorema si applica a tutti gli intervalli della forma $[x_*-\rho,\ x_*+\rho]$, con $\rho<0.8317\ldots$

In particolare, esiste un intervallo che contiene lo 0.



$\Rightarrow$ il metodo converge se parto da $x_0=0$ o da $x_0=1$, ecc.

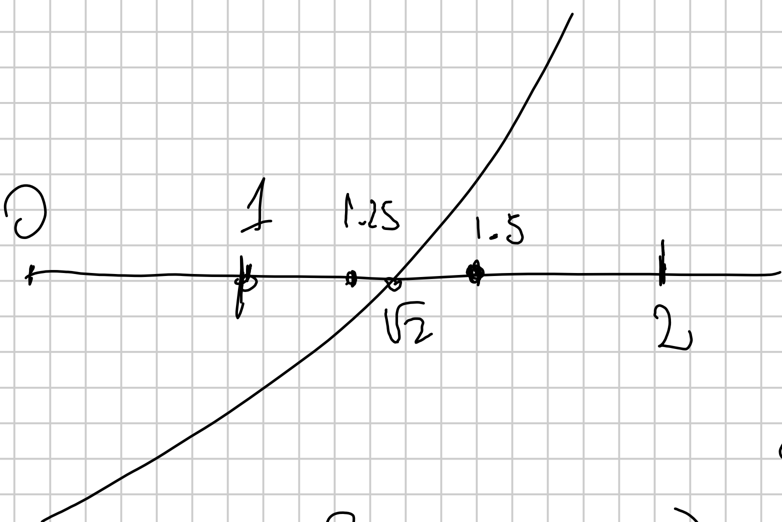
Vettori e matrici in Matlab.

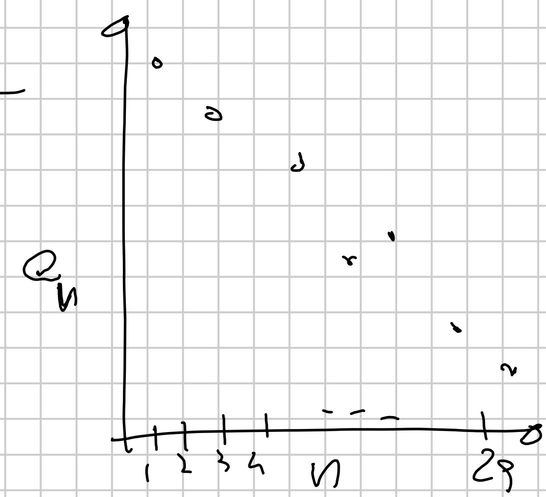
```
>> A = [1 2 3; 4 5 6]
>> length(v)        % sia vett. riga che colonne
>> size(A)
>> [m,n] = size(A)
>> A(2,1)        <- elemento di posto (2,1)
```

```
>> A(2,1) = 37;
>> plot(x,y)
```

Traccia un grafico congiungendo con una spezzata i punti $(x(1),y(1))$, $(x(2),y(2))$, ... $(x(n),y(n))$ fino alla lunghezza di x e y (che devono coincidere).

$$e_n = |x_n - x_*|$$






```
>> x=bisezione(f,0,2,1e-6)
>> e=abs(x-sqrt(2));
>> semilogy(1:29,e);
```