# SOLUZIONE DI EQUAZIONI LINEARI

Note Title 2021-10-25

$$x = f(A, b) \qquad Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad x, b \in \mathbb{R}^n$$

Norme vettoriali

$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è una norma vettoriale se soddisfa

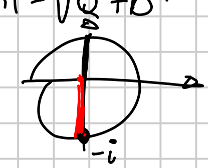
1) $f(v) \geq 0$ e $f(v) = 0$ se e solo se $v = 0$ $\qquad \|v\| \geq 0$
2) $f(\alpha v) = |\alpha| f(v)$ per $v \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3) $f(v+w) \leq f(v) + f(w)$ $\quad v, w \in \mathbb{C}^n$ $\qquad \|v+w\| = \|v\| + \|w\|$

$\uparrow$ disug. triangolare

Esempi di norme vettoriali

1) $\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$ (norma euclidea)
2) $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ (norma-1)
3) $\|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$ (norma-infinito)

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$




ES: $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -i \end{bmatrix}$

$$\|v\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |-3|^2 + |-i|^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} = 3,\dots$$

$$\|v\|_1 = |2| + |-3| + |-i| = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$\|v\|_\infty = \max(|2|, |-3|, |-i|) = 3$$

Teo: date due qualunque norme definite su $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_a$ $\|\cdot\|_b$, esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1 \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2 \|v\|_a \qquad \text{per ogni } v \in \mathbb{C}^n$$

ES: $1 \cdot \|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|v\|_\infty$ $\qquad$ ($C_1, C_2$ possono dipendere dalla dimensione $n$)

$$\|v\|_\infty = \sqrt{\max_i |v_i|^2} \le \sqrt{|v_1|^2+|v_2|^2+\dots+|v_n|^2} \le \sqrt{n \cdot \max_i |v_i|^2} = \sqrt{n}\cdot\|v\|_\infty$$

ES: Confrontiamo gli insiemi

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$S_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_1 = 1\} = \{|x|+|y| = 1\}$

$S_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_2 = 1\} = \{\sqrt{x^2+y^2} = 1\}$

$S_\infty = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_\infty = 1\} = \{\max(|x|,|y|) = 1\}$

4 casi: $x \ge 0$ $y \ge 0$ $x+y=1$

$x \le 0$ $y \ge 0$ $-x+y=1$

$x \ge 0$ $y \le 0$ $x-y=1$

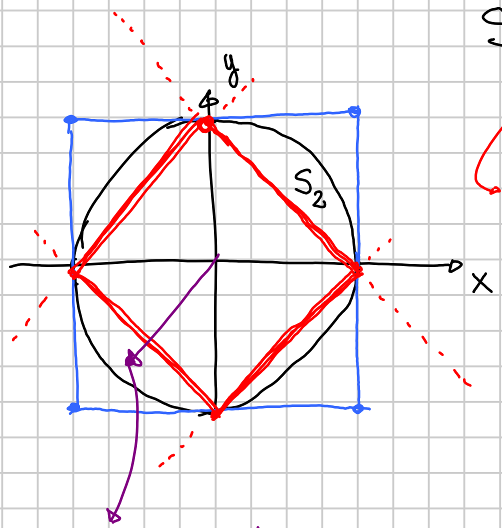
$x \le 0$ $y \le 0$ $-x-y=1$

4 casi: $x=1,\ |y| \le 1$

$x=-1,\ |y| \le 1$

$y=1,\ |x| \le 1$

$y=-1,\ |x| \le 1$




questo vettore ha $\|v\|_1 > 1$

$\|v\|_2 < 1$

$\|v\|_\infty < 1$

---

Norme matriciali: $f: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ è una norma matriciale se

1) $f(A) \ge 0$ per ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = 0$ se e solo se $A = 0$
2) $f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)$ per ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \|\alpha A\|$
3) $f(A+B) \le f(A) + f(B)$ per ogni $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\quad \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
4) $f(AB) \le f(A) f(B)$ per ogni $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\quad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Vediamo un modo di costruire norme matriciali a partire da norme vettoriali:

Def: la norma matriciale indotta costruita a partire da una norma vettoriale $\|v\|_p$ è definita come

$$(\star) \quad \underbrace{\|A\|_p}_{\text{norma di matrice}} = \max_{\{\|v\|_p = 1\}} \underbrace{\|Av\|_p}_{\text{norma di vettori}}$$

Soddisfa le proprietà 1–4.

In più, con questa definizione abbiamo

Teo: La norma matriciale $\|\cdot\|_p$ indotta da una norma vettoriale $\|\cdot\|_p$ soddisfa

$$\|Av\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|v\|_p \quad \text{per ogni } A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ v \in \mathbb{C}^n.$$

errata corrige

norma di matrice

⚠ deve essere la stessa norma

norma di vettori

dim: considero il "versore" $u = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$, multiplo di $v$ e con

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\|_p = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$$

$$\underline{\|A\|_p} \underset{\substack{\text{def. norma}\\ \text{indotta}}}{\geq} \|Au\|_p = \left\| A \cdot \frac{1}{\|v\|_p} \cdot v \right\|_p \underset{\frac{1}{\|v\|} \text{ è scalare}}{=} \left\| \frac{1}{\|v\|_p} Av \right\|_p \overset{\text{prop. 2}}{\underset{\text{prop. 2}}{=}} \underline{\frac{1}{\|v\|_p} \|Av\|_p}$$

cioè $$\|Av\|_p \leq \|A\|_p \|v\|_p. \qquad \square$$

Esistono anche norme di matrici che non provengono da queste costruzioni

ES: Norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

soddisfa tutte le proprietà 1–4 delle norme matriciali ma non si ottiene come norma indotta. Difatti, per esempio,

$$\|I\|_F = \left\| \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \sqrt{1^2+0^2+0^2+\dots+1^2+\dots} = \sqrt{n}$$

(su una $I$ $n\times n$)

$\|\cdot\|_F$ non è indotta

Invece, applicando (★) alla matrice identità abbiamo che per ogni norma indotta $\|\cdot\|_p$ si ha

$$\|I\|_p = \max_{\{\|v\|_p=1\}} \|Iv\|_p = \max_{\{\|v\|_p=1\}} \|v\|_p = 1.$$

---

Def: data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, se si ha l'uguaglianza $Av = v\lambda$, e $v \neq 0$, allora $v$ si dice autovettore di $A$, $\lambda$ autovalore di $A$

Se $\|\cdot\|$ è una norma matriciale indotta, allora per ogni autovalore e autovettore abbiamo

$$\cancel{\|v\|}\cdot|\lambda| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. 2} \\ \text{norme vett.}}}{=} \|v\lambda\| = \|Av\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. compatibilità}}}{\leq} \|A\|\cdot\cancel{\|v\|} \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

per ogni autovalore $\lambda$ di $A$

Def: il <u>raggio spettrale</u> di $A$, $\rho(A)$, è

$$\rho(A) = \max_{\lambda \text{ autoval. di } A} |\lambda|$$

$\rho$ rho (greco)

es: se gli autoval. di $A$ sono $\{-2, i, -i\}$, allora $\rho(A) = 2$,
(⚠ ma 2 non è autovalore)

Con questa definizione, $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni norma indotta

---

Teo: per le norme matriciali indotte delle norme vettoriali $1, 2, \infty$ valgono queste formule:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,..n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \rho(A^TA)^{1/2}$$

(non lo dimostriamo)

ES: $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\leftarrow |-2|+|-1| = 3$
$\leftarrow |-2|+|1| = 3$

$\|A\|_\infty = \max(3,3) = 3$

$|-2|+|-2| = 4$ $\quad$ $|-1|+|1| = 2$

$\|A\|_1 = \max(4,2) = 4$

$$A^TA = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha autovalori $(8, 2)$ $\quad$ $\rho(A^TA) = 8$

$\|A\| = \sqrt{8}$

---

Dato un sistema lineare $Ax = b$ con soluzione $x$, di quanto cambia la soluzione $x$ se perturbo il vettore $b$?

Se invece di $b$ considero $\tilde{b} = b + f$, posso chiamare $\tilde{x}$ la soluzione di $A\tilde{x} = \tilde{b}$.

$(x, \tilde{x}, b, \tilde{b}, f \in \mathbb{C}^n)$

Posso definire l'errore relativo tra vettori come

$$\frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}, \quad \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

(⚠ $\left\|\frac{\tilde{b}-b}{b}\right\|$ non vuol dire nulla, in algebra lineare)

Teo: per ogni norma $\|\cdot\|$ (e la corrispondente norma matriciale indotta) si ha

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \boxed{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

(per ogni $A, b, f$ con $A$ non singolare, $b \neq 0$)

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ viene chiamato $K(A)$, numero di condizionamento di $A$

dim: $x = A^{-1}b \qquad \tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$

$$\|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b\| = \|A^{-1}(\tilde{b} - b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

combinandole,

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}. \qquad \square$$

⚠ $\|A^{-1}\| \neq \|A\|^{-1} = \frac{1}{\|A\|}$

In realtà vale che

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$$

$\Rightarrow K(A)$ è sempre maggiore o uguale a 1

Ci sono matrici per cui $K(A) \approx 1$, o comunque piccolo $\to$ ben condizionate

e matrici per cui $K(A) \gg 1$, mal condizionate

Non lo dimostriamo, ma vale anche

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \overset{\bullet}{\leq} \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$$

a meno di termini dell'ordine di $\varepsilon^2$, dove $\varepsilon = \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$.