Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

APPENDICE AL FOGLIO DI TEORIA n. 6

1: relazione tra limiti di funzioni e convergenza uniforme di cammini di funzioni.

1.1 data $f : D \to E$, $D \subseteq M$ con distanza d, E con distanza d', e dati u punto di *accumulazione per* D, e $v \in E$, sono equivalenti:

i)
$$\lim_{x\to u} f(x) = v, \text{ ovvero}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x,u) \le \delta \text{ si ha } d'(f(x),v) \le \varepsilon.$$

ii)
$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{x\in D: 0<d(x,u)\le\rho} d'(f(x),v) = 0, \text{ cioè}$$
la convergenza uniforme a zero, per $\rho \to 0^+$, della famiglia funzioni
$$b_\rho(x) = d'(f(x),v) \cdot \chi_{(0;\rho]}(d(x,u))$$
(χ_C è la funzione caratteristica dell'insieme C).

iii)
$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{x\in D: d(x,u)=\rho} d'(f(x),v) = 0, \text{ cioè}$$
la convergenza uniforme a zero della famiglia funzioni $s_\rho(x) = d'(f(x),v) \cdot \chi_{\{\rho\}}(d(x,u))$

- Per prima cosa si osserva
i) vuol dire $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \qquad \sup_{0<d(x,u)\le\delta} d'(f(x),v) \le \varepsilon.$
ii) vuol dire $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \sup_{0<\rho\le\delta} \sup_{0<d(x,u)\le\rho} d'(f(x),v) \le \varepsilon.$
iii) vuol dire $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \sup_{0<\rho\le\delta} \sup_{0<d(x,u)=\rho} d'(f(x),v) \le \varepsilon.$

- i) $\Rightarrow$ ii): poichè $\omega(t) =: \sup_{x\in D: d(x,u)\le t} d'(f(x),v)$ è crescente: se vale i) per $\rho \le \delta$ si ottiene quindi $\omega(\rho) \le \varepsilon$, e quindi ii).

- ii) $\Rightarrow$ iii): poichè l'estremo superiore su un sottoinsieme è minore o eguale all'estermo superiore sull'insieme.

- ii) $\Rightarrow$ i): da ii) per $\rho = \delta$ si ha i).

- iii) $\Rightarrow$ i): si considera δ dato da iii). Se $0 < d(z,u) \le \delta$ si considera $\rho = d(z,u)$: per iii) si ha $\varepsilon \ge \sup_{0<\rho\le\delta} \sup_{0<d(x,u)=\rho} d'(f(x),v) \ge \sup_{0<d(x,u)=d(z,u)} d'(f(x),v) \ge d'(f(z),v)$.
Quindi per ogni z per cui $0 < d(z,u) \le \delta$ si ha $d'(f(z),v) \le \varepsilon$.

<u>Osservazione A1:</u> ł'argomento è generale: se ϕ, $\psi : D \to [0;+\infty)$, $\phi(x) > 0$ se $x \neq u$, si ha
$$\forall\varepsilon\exists\delta \sup_{x:\,0<\phi(x)\le\delta} \psi(x) \Longleftrightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \sup_{x:\,0<\phi(x)\le\rho} \psi(x) \Longleftrightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \sup_{x:\,\phi(x)=\rho} \psi(x).$$

<u>Osservazione A2:</u> per funzioni $f : D \to \mathbf{R}$, u di accumulazione per D, valgono caratterizzazioni per i limiti inferiore e superiore, $\liminf_{x\to u} f = \lim_{\rho\to 0^+} \inf_{0<d(x,u)\le\rho} f(x) = v \in \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ e $\limsup_{x\to u} f = \lim_{\rho\to 0^+} \sup_{0<d(x,u)\le\rho} f(x) = V \in \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, nel seguente senso:
$$\liminf_{\rho\to 0^+} \inf_{d(x,u)=\rho} f(x) = v, \qquad \limsup_{\rho\to 0^+} \sup_{d(x,u)=\rho} f(x) = V.$$

Esempio A.1 1- $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$, $u = (0,0)$: $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} v$ equivale a $\sup\limits_{x^2+y^2=\rho^2} |f(x,y) - v| \underset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Quindi comunque si parametrizzi con un cammino $\phi_\rho : I \to \mathbf{R}^2$, I intervallo, la circonferenza di centro $u = (0,0)$ e raggio ρ, si ha che $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} v$ equivale alla convergenza uniforme su I di $s_\rho(t) = |f(\phi_\rho(t)) - v|$ a 0 per ρ che tende a 0^+. Per esempio:

- - se $\phi_\rho(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t)$, $t \in [a; a+2\pi)$, si intende la convergenza uniforme, su $[a; a+2\pi)$, di $|f(\rho(\cos t, \sin t)) - v|$ a 0;

- - se si parametrizzano separatamente un numero finito di pezzi di circonferenza (che la ricoprono) si intende la convergenza uniforme della composione di $|f - v|$ con ogni parametrizzzazione. Come ulteriore esemplificazione $\phi_\rho^+(t) = \rho(t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 \le t \le 1$,
$\phi_\rho^-(t) = \rho(t+1, -\sqrt{1-(t+1)^2})$, $-2 \le t \le 0$, si intende la convergenza uniforme, a 0, sia di $|f(\rho t, \rho\sqrt{1-t^2}) - v|$ su $[-1;1]$, che di $|f(\rho(t+1), -\rho\sqrt{1-(t+1)^2}) - v|$ su $[-2;0]$.

2- $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0\} \to \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$, $u = (0,0,0)$: $f(x,y,z) \underset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} v$ equivale a $\sup\limits_{x^2+y^2+z^2=\rho^2} |f(x,y,v) - v| \underset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Quindi comunque si parametrizzi con $\phi_\rho : H \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la sfera di centro $u = (0,0)$ e raggio ρ, si ha che $f(x,y,z) \underset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} v$ equivale alla convergenza uniforme per $(s,t) \in H$ di $S_\rho(s,t) = |f(\phi_\rho(s,t)) - v|$ a 0 per ρ che tende a 0^+. Per esempio:

- - se $\phi_\rho(s,t) = (\rho\cos t\cos s, \rho\cos t\sin s, \rho\sin t)$, $|s| \le \pi$, $|t| \le \frac{\pi}{2}$, si intende la convergenza uniforme, su tale dominio, di $|f(\rho(\cos t\cos s, \cos t\sin s, \sin t)) - v|$ a 0.

3- $f : \mathbf{R}^m \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$, $u = \vec{0}$: $f(\vec{x}) \underset{\vec{x}\to\vec{0}}{\longrightarrow} v$ equivale a

$$\sup_{x_1^2+\cdots+x_m^2=\rho^2} |f(\vec{x}) - v| \underset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0, \text{ cioè } \sup_{\nu_1^2+\cdots+\nu_m^2=1} |f(\rho\vec{\nu}) - v| \underset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Comunque si parametrizzi $S^{m-1} = \{\vec{\nu} : \nu_1^2 + \ldots \nu_m^2 = 1\}$ la sfera unitaria $m-1$ dimensionale in $\mathbf{R}^m$, con $\Phi : H \subseteq \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}^m$, si intende quindi la convergenza uniforme su H di $S_\rho(\vec{t}) = |f(\rho H(\vec{t})) - v|$ a 0 per $\rho \to 0^+$. Per esempio

- - per $\Phi^+(\vec{t}) = (t_1, \ldots, t_{m-1}, \sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2})$, $|\vec{t}|_{\mathbf{R}^{m-1}} \le 1$,
$\Phi^-(\vec{t}) = (t_1, \ldots, t_{m-1}, -\sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2}$, $|\vec{t}|_{\mathbf{R}^{m-1}} \le 1$, si intende la convergenza uniforme a 0 sia di $\left| f\left(\rho t_1, \ldots, \rho t_{m-1}, \rho\sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2}\right) - v \right|_{\mathbf{R}^m}$, $\rho \to 0^+$,
sia di $\left| f\left(\rho t_1, \ldots, \rho t_{m-1}, -\rho\sqrt{1 - t_1^2 - \cdots - t_{m-1}^2}\right) - v \right|_{\mathbf{R}^m}$, $\rho \to 0^+$.

<u>Osservazione A3:</u> se si usano distanze $\widetilde{d}$ e $\widetilde{d}'$, rispettivamente su dominio e codominio, metricamente equivalenti rispettivamente a d e d', si ha che $\lim\limits_{x\to u} f(x) = v$ è equivalente a

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{x:\widetilde{d}(x,u)=\rho} \widetilde{d}'(f(x), v) = 0.$$

Ciò può avere una certa utilità nella pratica:

Esempio A.2 $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$, $u = (0,0)$: $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} v$ equivale anche a $\sup\limits_{\max\{|x|,|y|\}=\rho} |f(x,y) - v| \underset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Quindi comunque si parametrizzi con $\phi : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ il quadrato $Q = \partial([-1;1]\times[-1;1]) = \{1\}\times[-1;1] \cup [-1;1]\times\{1\} \cup \{-1\}\times[-1;1] \cup [-1;1]\times\{-1\}$, la convergenza di f ad v per $(x,y) \to (0,0)$ equivale alla convergenza uniforme a 0 su I di $q_\rho(t) = |f(\rho\phi(t)) - v|$ per $\rho \to 0^+$. Per esempio

- - equivale alla convergenza uniforme in t, per $\rho \to 0^+$ di $\ell_\rho^1(t) = |f(\rho, \rho t) - v|$, $|t| \le 1$, $\ell_\rho^2(t) = |f(\rho t, \rho) - v|$, $|t| \le 1$, $\ell_\rho^3(t) = |f(-\rho, \rho t) - v|$, $|t| \le 1$, $\ell_\rho^4(t) = |f(\rho t, -\rho) - v|$, $|t| \le 1$.

1.2: tutte le distanze indotte da norme negli spazi caresiani sono metricamente equivalenti. Si prova che tali sistanze sono tutte metricamente equivalenti a quella euclidea.

Sia ν una norma in $\mathbf{R}^m$, sia $e^1, \ldots, e^m$ la base canonica di $\mathbf{R}^m$ e $|x|_m$ la norma euclidea:

- Si mostra che la norma ν è continua rispsetto alla distanza euclidea.
- - Per diseguaglianza triangolare si ha $|\nu(u) - \nu(v)| \leq \nu(u - v)$,
- - iterando m volte la disguaglianza triangolare, usando l'omogeneità della norma e la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\nu(x) =&\nu(x_1 e^1 + \cdots + x_m e^m) \leq \\ &\leq |x_1|\nu(e^1) + \cdots + |x_m|\nu(e^m) \leq \max \nu(e^i) \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = \max \nu(e^i) \cdot \sqrt{m}|x|_m\end{aligned}$$

per $x = u - v$ ne segue $|\nu(u) - \nu(v)| \leq \nu(u - v) \leq C \cdot |u - v|_m$, $C_m = max\nu(e^i) \cdot \sqrt{m}$. Da cui la continuità di ν rispetto la distanza euclidea.

- Basta ora dimostrare che vi è c per cui vale la diseguaglianza opposta $c|u - v|_m \leq \nu(u - v)$.
- - Per continuità di ν, per il teorema di Bolzano-Weiestrass e per il teorema di Weiestrass $\exists \min\limits_{x:|x|_m=1} \nu(x) = \lambda$.
- - Quindi per ogni $x \neq 0_{\mathbf{R}^m}$ si ha $\lambda \leq \nu\left(\dfrac{x}{|x|_m}\right)$. Per omogeneità della norma ν si ha quindi $\lambda|x|_m \leq \nu(x)$, per $x \neq 0_{\mathbf{R}^m}$. Per $x = 0_{\mathbf{R}^m}$ la diseguaglianza vale comunque. Quindi per $x = u - v$ si ha

$$\lambda \cdot |u - v|_m \leq \nu(u - v) \leq C \cdot |u - v|_m.$$

<u>Osservazione A4:</u> quindi come nell'esempio A.2 per la norma $\nu(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$, per ogni norma ν in $\mathbf{R}^m$ si ha $\exists \lim\limits_{x \to \vec{0}} f(x) = v$ se e solo se $\psi_\rho(x) = f(x) \cdot \chi_{x:\nu(x)=\rho}(x) - v$ converge uniformememnte a 0 per $\rho \to 0^+$.

<u>Osservazione A5:</u> funzioni continue e c-positivamente omogenee.
L' argomento esposto per le norme vale in generale per funzioni continue e positivamente omeogene di grado positivo.
Sia $D \subseteq \mathbf{R}^m$ per cui se se $x \in D \setminus \{\vec{0}\}$ e $t >$ si ha $tx \in D$: *cono di centro* $\vec{0}$. Una $\phi : D \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbf{R}$ si dice *positivamente omogena di centro* $\vec{0}$ *di grado* c se per ogni $t > 0$ si ha $\phi(tx) = t^c \phi(x)$.
Si considera $f : \mathbf{R}^m \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbf{R}$, per la quale si vuole studiare $\lim\limits_{x \to \vec{0}} f(x) = v$.
Si considera una funzione $\phi : \mathbf{R}^m \to [0; +\infty)$ *continua* positivamente omogenea di grado $c > 0$, che si annulli solo in $\vec{0}$.

- Per quanto osservato in A1 si ha
$$\forall \varepsilon \exists \delta \sup_{x:\, 0<\phi(x)\leq\delta} |f(x) - v| \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{x:\, 0<\phi(x)\leq\rho} |f(x) - v| \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{x:\, \phi(x)=\rho} |f(x) - v|.$$
- Come per le norme (teorema di Weiestrass) $\exists \max\limits_{|x|_m=1} \phi(x) = \Lambda$, $\max\limits_{|x|_m=1} \phi(x) = \lambda$. Quindi $\forall x \in \mathbf{R}^m$ $\lambda \cdot |x|_m^c \leq \phi(x) \leq \Lambda \cdot |x|_m^c$, per cui si ha $\overline{B}\left(\vec{0}, \left(\dfrac{\rho}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{c}}\right) \subseteq \{x :\ \phi(x) \leq \rho\} \subseteq \overline{B}\left(\vec{0}, \left(\dfrac{\rho}{\lambda}\right)^{\frac{1}{c}}\right)$.

Concludendo
$$\lim_{x \to \vec{0}} f(x) = v \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{x:\, \phi(x)=\rho} |f(x) - v|.$$

2: sostituzione e cambio di variabile nei limiti e regole algebriche sui limiti.

2.1: il cambio di variabile è del tutto analogo aa quello che si fa per funzioni reali di variabile reale:
siano: $M \subseteq D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F$, u di accumulazione per D, v di accumulazione per $\mathrm{Im} f$, d, d', d'' distanze su rispettivamente su D, E, F.
- Se $\exists \lim_{x \to u} f(x) = v$, e $\exists \lim_{y \to v} g(y) = w$ e:
- - o i) vi è un intorno $\widetilde{U} \subseteq M$ di u per cui per ogni $x \in \widetilde{U} \cap D \setminus \{u\}$ si ha$f(x) \neq v$, cioè $f(\widetilde{U} \setminus \{u\}) \subseteq E \setminus \{v\}$,
- - o ii) g è continua in v, cioè $g(v) = w$,
- allora $\qquad \exists \lim_{x \to u} g(f(x)) = w.$

Dimostrazione: del tutto analoga a quelle per funzioni reali di variabile reale.
- Le ipotesi di limite sono:
- - dato W intorno di w vi è V intorno di v per cui $g(V \setminus \{v\}) \subseteq W$,
- - dato U intorno di u vi è W intorno di v per cui $f(U \setminus \{u\}) \subseteq V$.
- Si parte da un intorno W di w e si sceglie V intorno di v per cui $g(V \setminus \{v\}) \subseteq W)$ e U intorno di u per cui $f(U \setminus \{u\}) \subseteq V)$:
- - se vale i) si considera $U' = \widetilde{U} \cap U$ e si ottiene $f(U' \setminus \{u\}) \subseteq V \setminus \{v\}$, quindi
$g(f(U' \setminus \{u\})) \subseteq W$.
- - Se invece g è continua in v si ha
dato W intorno di w vi è V intorno di v per cui $g(V) \subseteq W$, pertanto direttamente $g(f(U \setminus \{u\})) \subseteq W$.

Esempio A.3: se si tolgono le ipotesi i) e ii) l'asserto è falso già per funzioni reali di variabile reale: f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $u = 0$, $v = 1$, $w = 2$: $f(x) = 1$ per $x \neq 0$, $f(0) = 3$, $g(y) = 2$ per $y \neq 1$, $g(1) = 4$. Si ottiene
$g(f(x)) = 4$ per $x \neq 0$, quindi $g(f(x)) \xrightarrow[x \to 0]{} 4$ mentre $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ e $g(y) \xrightarrow[y \to 1]{} 2$.

2.2: le regole algebriche dei limiti (finiti) e della continuità derivano rispettivamente da questo teorema di sostituzione e dal teorema di composizione per funzioni continue, e dalla seguente proposizione analoga a quella per la continuità FT6.2.1 proposizione 0, che si dimostra grazie alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione A1: sia $f : D \subseteq M \to E_1 \times \cdots \times E_m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in D$, u di accumulazione per D, d distanza su M, d_i su E_i, e su $E_1 \times \cdots \times E_m$ indifferentemente una delle distanze equivalenti definite in FT2 partire dalle d_i.

$$\exists \lim_{x \to u} f(x) = v = (v_1, \ldots, v_m)$$
$$\text{se e solo se}$$
$$\exists \lim_{x \to u} f_i(x) = v_i.$$

Esempio A.3: 1: se ϕ, $\psi : D \subseteq M \to \mathbf{R}^m$, u di accumulazione per D, e $\exists \lim\limits_{x \to u} \phi(x) = a \in \mathbf{R}^m$, $\exists \lim\limits_{x \to u} \phi(x) = b \in \mathbf{R}^m$ allora $\exists \lim\limits_{x \to u} f(x) + g(x) = a + b$.

- Per la proposizione A1 la funzione $P : D \to \mathbf{R}^{2m}$, $P(x) = (\phi(x), \psi(x))$, ha limite, per $x \to u$, eguale ad $(a, b) \in \mathbf{R}^{2m}$: $P(x) \xrightarrow[x \to u]{} (a, b)$.
- La funzione $S : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}^m$, $S(s, t) = s + t$ è continua.
- Poichè $\phi(x) + \psi(x) = S(P(x))$ si ha $\phi(x) + \psi(x) \xrightarrow[x \to u]{} S(a, b) = a + b$.