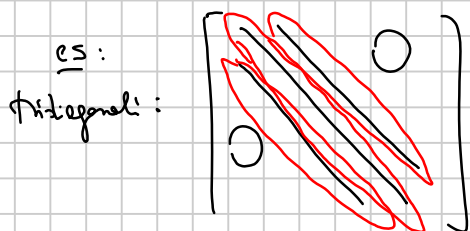
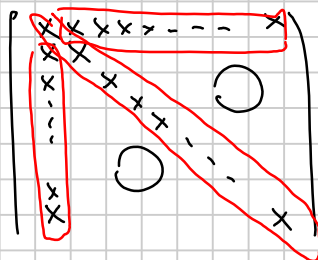
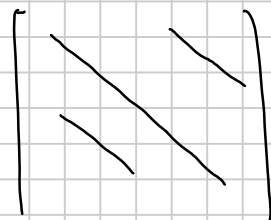


Matrici sparse \rightarrow grande quantità di zeri



$$A_{ij} = 0 \text{ se } |j-i| > 1$$



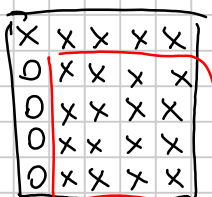
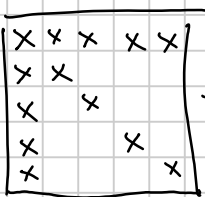
"matrici a freccia"

pochi (in pochi casi al più 3) elem. $\neq 0$ in ogni riga e/o colonna.

sparsa(A) \rightarrow produce una matrice in "formato sparso", cioè una lista di (i, j, A_{ij}) per tutti gli $A_{ij} \neq 0$

In questo corso: principalmente, memorizziamo direttamente righe/colonne/diagonali quando sono diversi da zero, in vettori.

Fill-in: facendo elim. Gauss, una matrice sparsa "si riempie": es



matrice piena/densa
 \uparrow
contario di sparsa.

Metodi iterativi: producono una successione di vettori $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ che (sotto alcune condizioni) converge alla soluzione x di un sist. lin. $Ax=b$.

Partiamo da uno "splitting" della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cioè un modo di scrivere $A = M - N$ $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, M invertibile.

La soluzione x del sist. lin. $Ax=b$ verifica $Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx = Nx+b \Leftrightarrow x = M^{-1}(Nx+b)$

Possiamo definire una iterazione di punto fisso

$$x = \Phi(x)$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}(Nx^{(k)} + b) \quad k=0,1,2,3,\dots \end{cases} \quad (*)$$

Solitamente, la convergenza del metodo si dimostra (o non si dimostra) indipendentemente dal vettore $x^{(0)}$.

Def: diciamo che il metodo (*) è convergente se per ogni scelta del punto iniziale $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si verifica che $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$, con x sol. del

Se la successione converge, il limite è sempre una sol. di $Ax=b$, per $\text{sist. lin. } Ax=b$.
 $x = M^{-1}(Nx+b) \Leftrightarrow Ax=b$ per questa uslo sopra.

Per studiare convergenza, definiamo $e^{(k)} = x^{(k)} - x$. Abbiamo $k=0,1,2,3,\dots$

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= M^{-1}(Nx^{(k-1)} + b) - M^{-1}(Nx + b) = M^{-1}(Nx^{(k-1)} - Nx) \\ &= H \cdot e^{(k-1)} \end{aligned}$$

$H \in \mathbb{R}^{n \times n}$
matrice di iterazione

Teorema: il metodo iterativo (*) è convergente se e solo se $\rho(H) < 1$
(raggio spettrale)

Dim: lo dimostreremo qui solo nel caso in cui H sia diagonalizzabile.

Dall'uguaglianza precedente, abbiamo

$$e^{(k)} = H e^{(k-1)} = H \cdot H e^{(k-2)} = \dots = H^k e^{(0)}$$

Stesso supponendo H diagonalizzabile, cioè esistono $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile, $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonale tali che $H = V \cdot D \cdot V^{-1}$ d_{kk} sono gli autovalori di H ,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ le colonne di } V \text{ sono vettori corrispondenti}$$

$$H^k = \underbrace{VDV^{-1} \cdot VDV^{-1} \cdot \dots \cdot VDV^{-1}}_{k \text{ volte}} = VD^k V^{-1} = V \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1}$$

Se $\rho(H) < 1$, $|\lambda_i| < 1$ per ogni i , quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$

e quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0$. Sostituendo più sopra, $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \Rightarrow x^k \rightarrow x$

Questo dimostra che se $\rho(H) < 1$ allora il metodo è convergente.
 L'Altra implicazione: se $\rho(H) \geq 1$, allora il metodo non è convergente, cioè esiste almeno una scelta di $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ tale che $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ non converge a x ; cioè $e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ non converge a 0.

Se $\rho(H) \geq 1$, allora esiste almeno un autovalore λ con $|\lambda| \geq 1$, $Hv = \lambda v$
 $\forall v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$

Scegliamo $x^{(0)} = x + v$, quindi $e^{(0)} = x^{(0)} - x = v$

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)} = H^k v = \underbrace{H \cdot H \cdot H \cdot H \dots H}_{k \text{ copie}} v = \underbrace{H \cdot H \dots H}_{k-1} \cdot \underbrace{H \cdot v}_{\lambda v} = \underbrace{H \dots H}_{k-2} \cdot \underbrace{v \cdot \lambda \cdot \lambda}_{2 \text{ volte}}$$

$$\dots = v \cdot \lambda^k$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} v \cdot \lambda^k$ che non esiste o comunque non fa 0, visto che $|\lambda| \geq 1$ e che $v \neq 0$. (perché autovettore.)

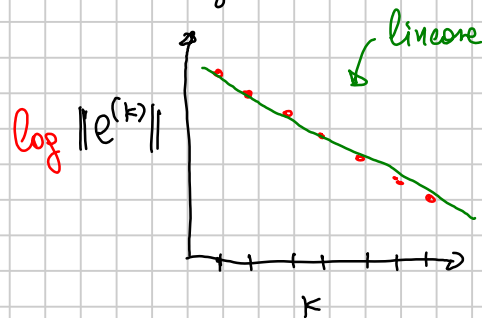
Oss: per ogni norma matriciale indotta, $\rho(H) \leq \|H\|$.

Condicio: se (per una particolare norma matriciale indotta) si ha $\|H\| < 1$, allora il metodo iterativo (*) è convergente.

⚠ Non è un "se e solo se".

Si può dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|} \leq \rho(H)$$



Il metodo converge linearmente, e converge più velocemente tanto più $\rho(H)$ è vicino a 0.

Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

Dato $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, definiamo

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & & -a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & & & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & -a_{n-1, n-1} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Metodo di Jacobi: corrisponde a $M=D$

Metodo di Gauss-Seidel: $M=D-E = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & & a_{nn} \end{bmatrix}$

Applicabili se $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sono tutti diversi da 0.

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ dato} \\ X^{(k+1)} = M^{-1}(NX^{(k)} + b) \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

passo k $MX^{(k+1)} = NX^{(k)} + b$ per il metodo di Jacobi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{nn} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{(k+1)} \\ X_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ X_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ X_3^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{11}X_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}X_2^{(k)} - a_{13}X_3^{(k)} - \dots - a_{1n}X_n^{(k)}$$

$$a_{22}X_2^{(k+1)} = b_2 - a_{21}X_1^{(k)} - a_{23}X_3^{(k)} - \dots - a_{2n}X_n^{(k)}$$

\vdots

$$a_{ii}X_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}X_j^{(k)} \quad \text{per ogni } i \text{ genericamente}$$

\Rightarrow posso calcolare

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}X_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

2n operazioni per ogni $x_i \Rightarrow 2n^2$ operazioni aritmetiche per passo.

Se so a priori che alcuni elementi di questa somma sono 0, posso eliminarli dalla somma.

ES: matrice bispagonale $\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$ \Rightarrow nella riga i , solo gli elementi $a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}$ sono $\neq 0$.

\Rightarrow 2 elementi per riga nello somma

Tenendo conto della posizione dei non-zero, possiamo dire che su una matrice sparsa il costo del metodo è $2 \cdot \underbrace{nnz(A)}_b$

(potenzialmente molto minore di n^2)

"numero dei non-zero"

Metodo di Gauss-Seidel: $MX^{(k+1)} = b + NX^{(k)}$ $A = M - N$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}$$

$$a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - a_{i,i+2}x_{i+2}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)}$$

Con sommatorie:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad \text{per } i=1,2,3,\dots,n$$

(in ordine)

Confronto con Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$$

- Criteri di arresto:
- 1) arresto quando $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$, oppure
 - 2) $\|Ax^{(k)} - b\| < \epsilon$ "residuo"

Quanto vale l'errore $e^{(k)}$ se ci arrestiamo con la regola (1)?

$$x^{(k-1)} - x^{(k)} = (x^{(k-1)} - x) - (x^{(k)} - x) = e^{(k-1)} - e^{(k)} = e^{(k-1)} - He^{(k-1)} = (I-H)e^{(k-1)}$$

$$e^{(k-1)} = (I-H)^{-1}(x^{(k-1)} - x^{(k)})$$

$$e^{(k)} = He^{(k-1)} = H(I-H)^{-1}(x^{(k-1)} - x^{(k)})$$

Se vale il 1° crit. di arresto,

$$\|e^{(k)}\| = \|H(I-H)^{-1}(x^{(k-1)} - x^{(k)})\| \leq \|H(I-H)^{-1}\| \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \leq \underbrace{\|H(I-H)^{-1}\|}_{\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

$$H(I-H)^{-1} = H(I + H + H^2 + H^3 + \dots)$$

↪ più piccola tanto più velocemente va a zero il metodo.