Note Title 2021-11-29

Quadrature Gaussiana

<u>Grado di precisione</u>: è il più alto m tale che una formula di quadratura restituisce il risultato esatto su tutti i polinomi di grado $\leq m$.

Trapezi, punto medio: grado $m = 1$ ($n=2$, $n=1$)

Cavalieri - Simpson : grado $m = 3$ ($n=3$)

$O(h^{m+1})$

Quanto alto può essere il grado di precisione di una formula con n nodi $\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$

<u>Oss</u>: è sufficiente che la formula sia esatta sui monomi, cioè

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot 1 = \int_a^b 1\, dx \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot x_k = \int_a^b x\, dx \quad , \dots \quad \sum_{k=1}^{n} w_k x_k^m = \int_a^b x^m dx$$

Difatti, dato un polinomio $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_m x^m$,

$$\int_a^b p(x)\,dx = a_0 \int_a^b 1\, dx + a_1 \int_a^b x\, dx + \dots + a_m \int_a^b x^m dx$$

$$\text{''} \qquad\qquad \text{''} \qquad\qquad \text{''} \qquad\qquad \text{''}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k p(x_k) = a_0 \sum_{k=1}^{n} w_k 1 + a_1 \sum_{k=1}^{n} w_k x_k + \dots + a_m \sum_{k=1}^{n} w_k x_k^m$$

$(*)$ sono $m+1$ equazioni in $2n$ incognite $w_1, \dots w_n, x_1, \dots x_n$ <u>non</u> lineari

<u>Teo</u>: le equazioni $(*)$ hanno una e una sola soluzione se scegliamo $m+1 = 2n$

$\Rightarrow$ Esiste una formula di quadratura con n nodi di grado $m = 2n-1$

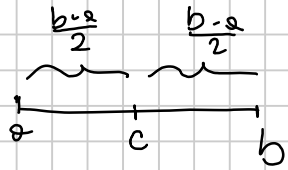
<u>Quadratura Gaussiana</u>

Per esempio, $[a,b] = [-1, 1]$, $n=2$

$$w_1 = w_2 = 1 \quad , \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{grado di precisione } 3$$

Non sono formule chiuse (non contengono gli estremi a, b tra i nodi), quindi sono meno adatte in versione composita, ma sono utili nella versione semplice per ottenere una formula con nodi fissati.

Con un cambio di variabile, posso ricondurre un integrale su un intervallo generico $[a,b]$ in uno su $[-1,1]$:



$$c = \frac{a+b}{2} \qquad x = c + \frac{b-a}{2} y$$

$$y = 1 \iff x = b$$
$$y = -1 \iff x = a$$
$$dx = \frac{b-a}{2} dy$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(c + \frac{b-a}{2} y\right) \frac{b-a}{2}\, dy.$$

Metodi numerici per equazioni differenziali

Problema ai valori iniziali (o di Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m \qquad y_0 \in \mathbb{R}^m \qquad f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

y' = derivata rispetto a t

ES: ("problema test") $m=1$

$$\begin{cases} y'(t) = \boxed{\lambda y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad f(t,y) = \lambda y \qquad [a,b] = [0,1]$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$
$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

ES: modelli per diffusione di epidemie

S = numero individui suscettibili

I = infetti

R = rimossi

$$\begin{cases} S' = -\beta S I \\ I' = \beta S I - \alpha I \\ R' = \alpha I \end{cases}$$

$m = 3$ variabili

$$y(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix} \qquad y'(t) = \begin{bmatrix} S'(t) \\ I'(t) \\ R'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta S(t) I(t) \\ \beta S(t) I(t) - \alpha I(t) \\ \alpha I(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \beta y_1 y_2 \\ \beta y_1 y_2 - \alpha y_2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix}}_{f(t,y)}$$

Equazioni di ordine maggiore si possono convertire in sistemi del primo ordine aggiungendo variabili ausiliarie

es:
$$\begin{cases} z'' = 3t z' + 5(t^2+1) z \\ z(a) = 6 \\ z'(a) = 7 \end{cases} \qquad z(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \qquad y'(t) = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z' \\ 3tz' + 5(t^2+1) z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ 3t y_2 + 5(t^2+1) y_1 \end{bmatrix}}_{f(t,y)}$$

problema ai val. iniz. del primo ordine
$$\begin{cases} y'(t) = \\ y(a) = \begin{bmatrix} z(a) \\ z'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Gli algoritmi che vedremo producono una successione $y_1, y_2, \dots y_N$ tale che $y(t_i) \approx y_i$

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad t_n = a + nh$$

$a = t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad \dots \quad t_{N-1} \quad t_N = b$

$y(a) = y(t_0) = y_0$ già dato

Metodo di Eulero esplicito

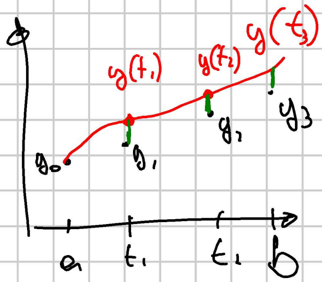
Sviluppo di Taylor in t_n:

ignoriamo questo termine

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + \underbrace{y'(t_n)}_{= f(t_n, y(t_n))} h + \boxed{\frac{1}{2} y''(\xi) h^2}$$

$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$ → formula da cui posso calcolare y_{n+1} dato y_n

Metodo di Eulero esplicito: $y_0 \to y_1 \to y_2 \to y_3 \to \dots$



$$\begin{cases} y_0 \text{ dato} \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots N-1 \end{cases}$$

→ N volte

1 addizione, 1 moltiplicazione, 1 valutazione della funzione f × N passi:

⇒ N valutazioni di f (più $O(N)$ operazioni).

Metodo di Eulero implicito:

usiamo uno sviluppo di Taylor in t_{n+1} per valutare $y(t_n)$

$$y(t_n) = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \underbrace{y'(t_{n+1})}_{= f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))} + \underbrace{\frac{1}{2} y''(\xi) h^2}_{\text{resto, } O(h^2)}$$

$$y_n = y_{n+1} - h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$(**) \quad y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \qquad n = 0, 1, 2, \dots N-1$$

y_{n+1} (incognita) compare sia a sinistra che a destra ⇒ non possiamo calcolarlo direttamente

La (**) definisce implicitamente il valore di y_{n+1} con un'equazione.

Per alcuni problemi particolari, la sappiamo risolvere: ad es. problema test $y'(t) = \underbrace{\lambda y(t)}_{f(t,y) = \lambda y}$ (λ dato)

(**) diventa $y_{n+1} = y_n + h \lambda y_{n+1} \iff (1 - h\lambda) y_{n+1} = y_n$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n$$

Per scelte più complicate di f, equazione non semplice da risolvere,

es. $y' = 17 t y^{32}$ $\qquad y_{n+1} = y_n + h\, 17\, t_{n+1} y_{n+1}^{32}$ → equazione di grado 32

Possiamo però risolvere la (**) con un metodo per risolvere equazioni non lineari, ad es. metodo di Newton, bisezione, punto fisso, ecc.

<u>ES</u>: metodo di punto fisso:

$$y_{n+1} = \underbrace{y_n + h f(t_n, y_{n+1})}_{\phi(y_{n+1})} \to \begin{cases} z_0 = y_n \\ z_{k+1} = \phi(z_k) = y_n + h f(t_n, z_k) \end{cases}$$

$$\phi'(z) = \frac{d}{dz}\left(y_n + h f(t_n, z)\right)$$

$$= h \frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z)$$

Se h suff. piccolo, posso sperare di avere $|\phi'(z)| < 1$ su un intervallo sufficientemente ampio $\Rightarrow$ convergenza del metodo.

Metodo di Eulero implicito:

y_0 dato

per $n = 0, 1, 2, \dots N-1$,

utilizzo un qualche metodo numerico per risolvere

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$ nella variabile y_{n+1}.

Costo computazionale:

N soluzioni dell'equazione $\Rightarrow NK$ valutazioni di f, se risolvere l'equazione richiede in media K valutazioni della f.

Metodo dei trapezi:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt \approx y(t_n) + h\left(\frac{1}{2}y'(t_n) + \frac{1}{2}y'(t_{n+1})\right)$$

metodo dei trapezi

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2}\underbrace{f(t_n, y_n)}_{f_n} + \frac{1}{2}\underbrace{f(t_{n+1}, y_{n+1})}_{f_{n+1}}\right)$$

"media" tra il metodo di Eulero esplicito e implicito

È un metodo <u>implicito</u>, la y_{n+1} compare anche a destra dell'uguale

Perché dovrebbe funzionare meglio?

Perché $$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = y(t_n) + h\left(\frac{1}{2}y'(t_n) + \frac{1}{2}y'(t_{n+1}) + O(h^2)\right)$$
$$= y(t_n) + h\left(\frac{1}{2}y'(t_n) + \frac{1}{2}y'(t_{n+1})\right) + \underline{\underline{O(h^3)}}$$

ordine maggiore rispetto a $O(h^2)$ dei metodi di Eulero

Metodo dei trapezi:

y_0 dato

per $n = 0, 1, 2, \dots N-1$

Calcolo y_{n+1} risolvendo $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$ in y_{n+1}

Costo: $2NK$ valutazioni, se il metodo numerico usato per risolvere l'equazione valuta la funzione K volte in media

---

Un <u>metodo generale a un passo</u> è un metodo del tipo

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(t_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots N-1$$

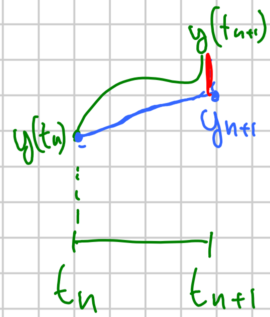
Dove $\phi(t, y)$ è una funzione delle sole t, y (che includerà al suo interno f, h implicitamente, e può essere definita implicitamente come soluzione di un'equazione)

<u>Errore globale</u>:

$$E = \max_{n=1,2,\dots N} |e_n| \qquad e_n = y_n - y(t_n)$$

<u>Errore locale di troncamento</u>:

$$T = \max_{n=0,1,2,\dots N-1} |\tau_n| \qquad \tau_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \phi(t_n, y(t_n))$$



$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{y(t_{n+1})}_{\text{valore esatto}} - \left[y(t_n) - h\,\phi(t_n, y(t_n))\right]\right)$$

approssimazione prodotta dal metodo partendo dal valore corretto di $y(t_n)$

<u>Definizione</u>: consideriamo il limite $N \to \infty$, con $[a,b]$, f, y_0 fissati (e quindi $h = \frac{b-a}{N} \to 0$).

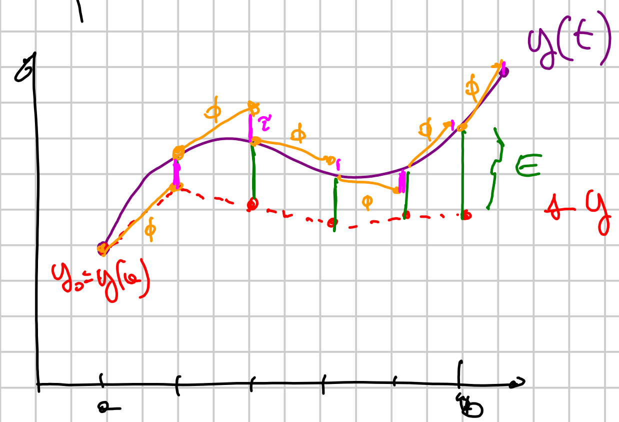
Diciamo che il metodo è <u>convergente di ordine p</u> se $E = O(h^p)$

Diciamo che il metodo è <u>consistente (coerente) di ordine p</u> se $T = O(h^p)$

<u>Teo</u> Supponiamo che la funzione Φ sia continua per $t \in [a,b]$, e che esista una costante $L \in (0,\infty)$ tale che

$$\|\Phi(t,y_1) - \Phi(t,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|.$$

Allora, su ogni problema tale che $y(t) \in C^{p+1}([a,b])$, un metodo a un passo è convergente di ordine p se e solo se è consistente di ordine p.



La condizione di Lipschitzianità nella y è simile a quella che compare nel teorema di esistenza e unicità: $\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione unica se e solo se f è continua e Lipschitziana nella y.