- Verificare che la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

  è $y^{(1)}(t) = \cos t$, $y^{(2)}(t) = -\sin t$.
- Scrivere una function `[t, Y] = euleroesplicito(f, a, b, y0, N)` che approssima la soluzione di un problema ai valori iniziali con il metodo di Eulero esplicito, restituendo $t = [t_0, t_1, \dots, t_N] \in \mathbb{R}^{1\times(N+1)}$ e $Y = [y_0, y_1, \dots, y_N] \in \mathbb{R}^{m\times(N+1)}$.
- Tracciare un grafico della soluzione calcolata di (1) (sull'intervallo `0, 2*pi` e con diversi valori di N) e della soluzione esatta con il comando `plot(t, Y, t, [cos(t);-sin(t)])`.
- Calcolare l'errore massimo $E = \max_{n=1,2,\dots,N} \max_{i=1,2} |\tilde{y}_n^{(i)} - y_n^{(i)}|$ tra la soluzione numerica calcolata dal metodo e quella esatta (suggerimento: usare le funzioni `max`,`abs`,`sin`,`cos` di Matlab su vettori/matrici).
- Verificare che raddoppiando il valore di N il valore di E si riduce di un fattore circa 2, come previsto dalla convergenza di ordine 1 del metodo.
- Cosa succede con un intervallo $[a, b]$ più ampio, ad es. $[0, 100]$?
- Risolvere il problema stiff $y' = Ay$, $A = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$ con diversi valori di N.

- Scrivere una function `[t, Y] = euleroimplicito(A, a, b, y0, N)` che utilizza il metodo di Eulero implicito per risolvere il problema lineare

$$y' = Ay, \quad y(a) = y_0. \tag{2}$$

  Utilizzare il comando \ per risolvere il sistema lineare necessario per calcolare y_{n+1}.
- Testare la funzione sul problema (1) della slide precedente, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Come per il metodo di Eulero esplicito, tracciare un grafico della soluzione calcolata e di quella esatta; calcolare l'errore globale di discretizzazione E e verificare decresce come previsto per un metodo di ordine $p = 1$.
- Risolvere il problema stiff $y' = Ay$, $A = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$ con diversi valori di N.
- Scrivere una function `[t, Y] = trapezidiff(A, a, b, y0, N)` che utilizza il metodo dei trapezi per risolvere (2). Calcolare l'errore globale E ottenuto su (1) e verificare che la convergenza del metodo è di ordine $p = 2$.
- Il problema (1) simula una particella in moto circolare uniforme. Tracciare, con il comando `plot(Y(1,:), Y(2,:))`, un grafico dell'orbita della particella. Verificare graficamente che con il metodo di Eulero esplicito le orbite si allargano lentamente al di fuori del cerchio $(y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2 = 1$, con il metodo di Eulero implicito si stringono al suo interno, e con il metodo dei trapezi rimangono approssimativamente sul bordo.