Note Title 2021-12-01

METODI PER ODE

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases} \qquad t \in [a,b] \qquad y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

Metodo di Eulero esplicito: $y_{n+1} = y_n + h \underbrace{f(t_n, y_n)}_{\Phi(t_n,y_n)}$ $n = 0, 1, \dots, N-1$

Metodo di Eulero implicito $y_{n+1} = y_n + h \underbrace{f(t_{n+1}, y_{n+1})}_{\Phi(t_n,y_n)\dots}$

Metodo dei trapezi $y_{n+1} = y_n + \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)}_{= h\,\Phi(t_n,y_n)}$

$y_n \approx y(t_n)$ $t_0 = a, t_1, \dots t_N = b$ $h = \frac{b-a}{N}$

Metodo a un passo generico $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n)$

Si dice consistente di ordine p se $\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t_n, y(t_n)) = O(h^p)$

Si dice convergente di ordine p se $y(t_n) - y_n = O(h^p)$

Teo: sotto opportune condizioni, consistente di ordine p $\Leftrightarrow$ convergente di ordine p.

Metodo di Eulero esplicito: $y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + h \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{= y'(t_n)} + O(h^2)$

$$\underbrace{\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{= \Phi(t_n, y(t_n))}}_{\tau_n} = O(h^1) \quad \leadsto \text{consistente di ordine } 1$$

Metodo di Eulero implicito : sviluppo di Taylor in t_{n+1}

$y(t_n) = y(t_{n+1} - h) = \dots$ calcolo analogo a quello precedente

ci dice che il metodo è consistente di ordine $p = 1$.

Metodo dei trapezi:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = y(t_n) + h\left(\frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right) + O(h^3)$$

$$\tau_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t_n, y(t_n)) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right)$$
$$= O(h^2)$$

Come trovare metodi di ordine superiore?

RUNGE-KUTTA

Famiglia più diffuse di metodi a un passo: metodi di Runge-Kutta

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,\Phi(\ldots)$$

BUTCHER

Definiti tramite un insieme di coefficienti detto tavola di Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

s = numero di stadi

$$y_{n+1} = y_n + h\underbrace{(b_1 K_1 + b_2 K_2 + \ldots + b_s K_s)}_{\Phi(t_n, y_n)}, \qquad K_i = f\left(t_n + c_i h,\ y_n + h\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j\right)\right)$$
$$i = 1, 2, \ldots s$$

Metodo di Eulero esplicito: $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\quad s = 1$

$$K_1 = f(t_n + 0 \cdot h,\ y_n + h(0 \cdot K_1)) = f(t_n, y_n) \qquad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

Metodo di Eulero implicito $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\quad s = 1$

$$\boxed{K_1 = f(t_n + h,\ y_n + h K_1)} \qquad y_{n+1} = y_n + h K_1, \quad \text{cioè}$$
$$= f(t_{n+1}, y_{n+1}) \qquad y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Metodo dei trapezi: $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$ $\quad s = 2$

$$k_1 = f(t_n + h\cdot 0,\ y_n + h(0\cdot k_1 + 0\cdot k_2)) = f(t_n, y_n)$$

implicito

$$k_2 = f\left(t_n + h\cdot 1,\ y_n + h\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)\right) = f\Big(t_{n+1},\ \underbrace{y_n + h\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)}_{"y_{n+1}}\Big)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = y_n + h\left(\tfrac{1}{2}f(t_n, y_n) + \tfrac{1}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

In un metodo a s stadi, compaiono s valutazioni della funzione f.

Nel calcolo di $k_i = f(t + hc_i,\ y_i + h(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{is}k_s))$,
$i = 1, \dots s$

è possibile calcolare esplicitamente i k_i "in avanti", $k_1, k_2, \dots k_s$ se e solo se $a_{ij} = 0$ quando $j \geq i$, cioè se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

è triangolare inferiore con 0 sulla diagonale (strettamente triang. inf.).

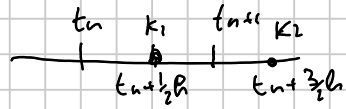
Esempio: metodo con tableau di Butcher $\rightarrow$

$$\begin{array}{c|cc} c_1 = \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ c_2 = \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} & 2 \\ \hline & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{2} \\ & b_1 & b_2 \end{array} \qquad A \qquad s = 2$$

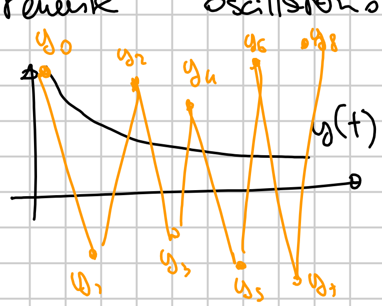
$$k_1 = f\left(t_n + h\cdot\tfrac{1}{2},\ y_n + h\left(\tfrac{1}{2}k_1 + 0k_2\right)\right) \leftarrow \text{definisce implicitamente } k_1$$

$$k_2 = f\left(t_n + h\cdot\tfrac{3}{2},\ y_n + h\left(-\tfrac{1}{2}k_1 + 2k_2\right)\right) \leftarrow \text{definisce implicitamente } k_2$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{3}{2}k_2\right)$$



Su alcuni problemi, metodi come il metodo di Eulero esplicito hanno un comportamento fortemente oscillatorio a meno che h sia molto piccolo

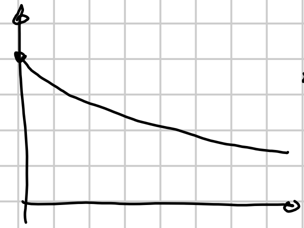


Studiamo il comportamento sul cosiddetto problema test

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t\in[0,1] \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad f(t,y) = \lambda y$$

soluzione $\quad y(t) = e^{\lambda t}$

Comportamento se $\lambda < 0$

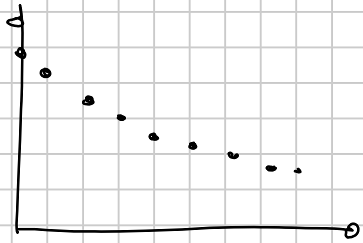


Metodo di Eulero esplicito per questo problema:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1+h\lambda)\, y_n = (1+h\lambda)^2 y_{n-1} = (1+h\lambda)^3 y_{n-2} = \dots (1+h\lambda)^{n+1} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{y_0}}$$

$$y_n = (1+h\lambda)^n = \left(1+\frac{\lambda}{N}\right)^n$$

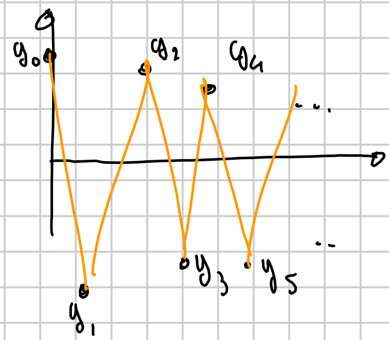
se $1+h\lambda \in (0,1)$



Quindi $y_N = \left(1+\frac{\lambda}{N}\right)^N$

converge a $y(1) = e^{\lambda}$

se $1+h\lambda < 0$,



se $(1+h\lambda) < -1$,

oscillazioni sempre più grandi!

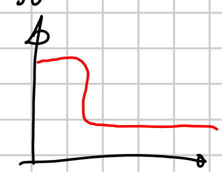
Se il passo h è sufficientemente piccolo da avere $h\lambda \in (-1,0)$, $1+h\lambda \in (0,1)$, non ho questo comportamento.

Più piccolo è λ, più piccolo dovrà essere il passo scelto.
(grande in val. ass.)

Equazioni STIFF (RIGIDE): equazioni differenziali in cui serve (con metodi come quello di Eulero esplicito) un passo molto piccolo per avere buone approssimazioni della soluzione.

Tipicamente, succede con:

- $y(t)$ che varia velocemente su alcuni intervalli



- fenomeni che avvengono a scale diverse

es. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{bmatrix} \qquad y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

Se $\lambda_1 \ll \lambda_2 < 0$,

λ_1 mi detta la scelta di h, ma $\left\| \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \right\|$ è circa $e^{\lambda_2 t}$

- $f(t,y) \approx Ay$, con A mal condizionata

Alcuni metodi funzionano meglio di altri sui problemi stiff, in particolare i metodi impliciti.

Possiamo ripetere l'analisi fatta per il metodo di Eulero esplicito; per un metodo RK generico, otteniamo

$$y_{n+1} = R(q)\, y_n \qquad q = \lambda h$$

$$y_n = (R(q))^n y_0 = (R(q))^n$$

se applichiamo un metodo di Runge-Kutta al problema test $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

ES: metodo dei trapezi

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) = y_n + h\left(\frac{1}{2}\lambda y_n + \frac{1}{2}\lambda y_{n+1}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}h\lambda\right) y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h\lambda y_n \qquad y_{n+1} = \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}}_{R(q)} y_n \qquad q = h\lambda$$

Vogliamo stabilire per quali valori di q si ha $|R(q)| < 1 \Rightarrow y_n \to 0$ al crescere di $n \Rightarrow$ le y_n tendono a 0.

Questo corrisponde al comportamento della soluzione esatta $y(t) = e^{\lambda t}$ quando $\operatorname{Re} \lambda < 0$

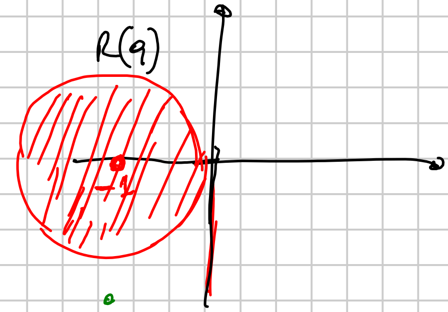
Definizione: la regione di assoluta stabilità di un metodo RK è l'insieme $\{q \in \mathbb{C} : |R(q)| < 1\} = S_A$

Definizione: un metodo si dice A-stabile se S_A contiene tutto il semipiano sinistro $\{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} q < 0\}$.

ES metodo di Eulero esplicito: $R(q) = 1 + q \qquad q = h\lambda$

$S_A = \{ q \in \mathbb{C} : |1+q| < 1 \}$

$=$ cerchio di centro -1 e raggio 1.



Il metodo di Eulero esplicito <u>non</u> è A-stabile: esistono scelte di λ con $Re(\lambda) < 0$ e del passo h tali che $|R(q)| \geq 1$ $\Rightarrow$ la successione y_n <u>non</u> tende a zero, però la soluzione esatta $y(t) = e^{\lambda t}$ tende a zero per $t \to \infty$

<u>ES</u> metodo dei trapezi: $R(q) = \dfrac{1+q}{1-q}$ $\quad (q = h\lambda)$

$$S_A = \left\{ q \in \mathbb{C} : \frac{|1+q|}{|1-q|} < 1 \right\} =$$

$$= \{ q \in \mathbb{C} : Re(q) < 0 \}$$

$|1+q|$ = distanza fra q e -1

$|1-q|$ = distanza fra q e 1

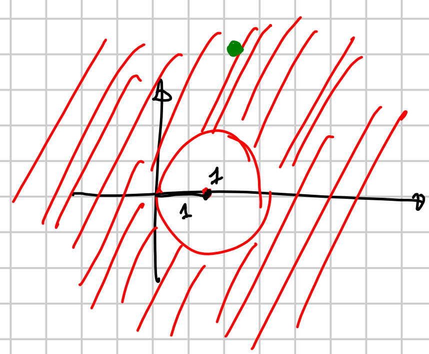
$\dfrac{|1+q|}{|1-q|} < 1$ sse q è più vicino a -1 che non a 1

$\Rightarrow$ q è nel semipiano negativo

$\Rightarrow$ Il metodo dei trapezi è A-stabile (la sua regione di stabilità è <u>esattamente</u> il semipiano negativo)

$\Rightarrow$ la successione $\{y_n\}$ tende a zero tutte le volte che la soluzione esatta $y(t)$ tende a 0.

<u>Metodo di Eulero implicito</u>:



$R(A)$ = <u>esterno</u> del cerchio di centro 1 e raggio 1

$\Rightarrow$ metodo di Eulero <u>implicito</u> è A-stabile

(Anzi, è "troppo stabile": se $Re(\lambda) > 0$, $|y(t)| \to \infty$, ma $|y_n| \to 0$.)

Teo: non esistono metodi di Runge-Kutta <u>espliciti</u> <u>A-stabili</u>.

Motiva l'importanza di usare metodi impliciti anche se più complicati da implementare