

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20  
 ALGEBRA LINEARE F. Acquistapace, V.M. Tortorelli  
 Quinto foglio di esercizi  
 Domande di introduzione

**Domanda 1** Calcolare  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Domanda 2 a-** Calcolare  $\det \begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ .

Provare le seguenti identità

b-  $\det \begin{pmatrix} A_{h \times h} & B_{h \times (n-h)} \\ O_{(n-h) \times h} & D_{(n-h) \times (n-h)} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$ .

c-  $\det \begin{pmatrix} \boxed{A_{h_1 \times h_1}^1} & B_{h_1 \times h_2} & \cdots & B_{h_1 \times h_k} \\ O_{h_2 \times h_1} & \boxed{A_{h_2 \times h_2}^2} & \cdots & B_{h_2 \times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{h_k \times h_1} & O_{h_k \times h_2} & \cdots & \boxed{A_{h_k \times h_k}^k} \end{pmatrix} = \det A^1 \cdot \dots \cdot \det A^k$ , con  $h_1 + \dots + h_k = n$ .

**Domanda 3** Siano  $M = (M^1 | \dots | M^n) \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K})$ ,  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ ,  $b = {}^t(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^n$  per cui  $Mx = b$ .

a- (Cramer) Si provi, utilizzando il fatto che  $b = x_1 M^1 + \dots + x_n M^n$ , e calcolando il determinante della matrice  $M[b/M^i]$ , ottenuta da  $M$  sostituendo  $b$  alla  $i^a$  colonna di  $M$

$$x_i = \frac{\det M[b/M^i]}{\det M}.$$

b- Se  $M$  è invertibile allora per l'elemento di riga  $i^a$  e colonna  $j^a$  della matrice inversa vale la formula:

$$(M^{-1})_i^j = \frac{1}{\det M} (-1)^{i+j} \det M_y^i$$

ove  $M_y^i$  è la matrice  $(n-1) \times (n-1)$ , ottenuta da  $M$  cancellando la  $j^a$  riga e la  $i^a$  colonna.

**Domanda 4** (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ ,  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c \in \mathbf{C}$ .

b- Dati  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$  distinti, si consideri il polinomio  $P(z) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$ .

- Che grado al massimo ha  $P$ ?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di  $P$  e fattorizzarlo.

c- Dati  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$  qualsiasi, provare  $\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$ .

d- Sia  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un riordinamento dei numeri  $1, \dots, n$ .  
 Provare che  $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j} (a_i - a_j)$  conta la parità degli scambi per riportare  $(a_1, \dots, a_n)$  nell'ordine naturale  $1 < \dots < n$ . [Si consideri il determinante di Vandermonde dei numeri  $(a_1, \dots, a_n)$  nell'ordine e quello di  $(1, \dots, n)$ .]  
 - Che dire se  $a = (a_1, \dots, a_n)$  sono solo alcuni dei numeri tra  $1, \dots, n$ , riordinati, ma con ripetizioni?

**Domanda 5** Siano  $U$ , uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  su  $K$ , ed  $f : U \rightarrow U$  un endomorfismo lineare di  $U$  in sé. Si provi che:

la matrice associata ad  $f$  è la stessa in ogni base di  $U$   
 se e solo se

$f$  è un multiplo dell'identità su  $U$

*i.e.* vi è  $\lambda \in K$  per cui  $f(u) = \lambda u$ , per ogni  $u \in U$ .

[Può esser utile fissare una base di  $U$  e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

**Domanda 6** Sia  $M$  una matrice  $3 \times 3$  che in una certa base di  $\mathbf{R}^3$  rappresenta una rotazione per un angolo convesso attorno a qualche retta per l'origine. Calcolare l'ampiezza della rotazione in termini dei coefficienti di  $M$ .

**Domanda 7** (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$  per cui

$$A^2 - 4A + 3I = O$$

ove  $I$  è la matrice identica  $n \times n$  e  $O$  quella nulla.

- a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di  $A$ .
- b- Dimostrare che  $A$  è diagonalizzabile.

**Domanda 8** Dati due vettori  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$  si indichi con  $P(u, v)$  il parallelogramma di vertici:  $0_{\mathbf{R}^2}, u, v, u + v$ .

Identificando per colonne  $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$  con  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ , si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma",  $A^\circ : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$A^\circ(u, v) = \begin{cases} \text{area di } P(u, v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ - \text{area di } P(u, v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:

$$A^\circ(Id_{2 \times 2}) = 1, A^\circ(u + \lambda v, v) = A^\circ(u, v + \mu u) = A^\circ(u, v), A^\circ(\lambda u, v) = A^\circ(u, \lambda v) = \lambda A^\circ(u, v).$$

b- Si mostri che  $A^\circ$  è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

c- Si mostri che  $A^\circ(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ .

**Domanda 9** Si identifichi per colonne  $\mathcal{M}(n, n, K)$  con  $K^n \times_{n \text{ volte}} \times K^n$ , e si denoti con  $(e^1, \dots, e^n)$  la base canonica di  $K^n$ .

Una funzione  $\Lambda : K^n \times_{n \text{ volte}} \times K^n \rightarrow K$ ,  $\Lambda(u^1, \dots, u^n)$  si dice:

- *multilineare* se fissati  $n - 1$  argomenti è lineare nel rimanente.
- *alternante* se si annulla quando due argomenti sono linearmente dipendenti,
- *normalizzata* se  $\Lambda(e^1, \dots, e^n) = 1$ .

a- Se  $\Lambda$  è alternante normalizzata, e  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma_i = \sigma(i)$ , allora

$$\Lambda(e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_n}) = \text{segno} \prod_{i < j} (\sigma_i - \sigma_j) = \det(e^{\sigma_1}, \dots, e^{\sigma_n})$$

ovvero la parità del numero di scambi per riportare  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  in  $(1, \dots, n)$ .

b- Il determinante è *l'unica funzione* multilineare, alternante (rispetto le colonne viz. righe) e normalizzata.