Metodi multistep (a più passi)

Note Title 2021-12-13

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_k y_{n+k} = h\Big(\beta_0 \underbrace{f(t_n,y_n)}_{f_n} + \beta_1 \underbrace{f(t_{n+1},y_{n+1})}_{f_{n+1}} + \dots + \beta_k \underbrace{f(t_{n+k},y_{n+k})}_{f_{n+k}}\Big)$$

$p_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$ $\qquad p_2(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_k z^k$

0-stabilità: applicando il metodo a $\begin{cases} y' = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ ottengo $\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_k y_{n+k} = 0$

equazione alle differenze

Ha $\boxed{\text{soluzione limitata}}$ se e solo se vale la condizione delle radici:

- ogni radice λ di $p_1(z)$ è tale che $|\lambda| \leq 1$
- le radici λ con $|\lambda| = 1$ sono semplici

Se vale questa proprietà, il metodo si dice 0-stabile

Teo: un metodo è convergente (di ordine p) se è consistente (di ordine p) e 0-stabile

---

Di nuovo, convergenza non è sufficiente per assicurare buon comportamento con h "non troppo piccoli", e per investigare il fenomeno consideriamo A-stabilità e problema test.

$$(*)\ \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \qquad [a,b] = [0,1]$$

Applicando il metodo a $(*)$, otteniamo

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_k y_{n+k} = h(\beta_0 \lambda y_n + \beta_1 \lambda y_{n+1} + \dots + \beta_k \lambda y_{n+k})$$

$$(\alpha_0 - \underbrace{h\lambda}_{q}\beta_0) y_n + (\alpha_1 - \underbrace{h\lambda}_{q}\beta_1) y_{n+1} + \dots + (\alpha_k - \underbrace{h\lambda}_{q}\beta_k) y_{n+k} = 0$$

Equazione alle differenze (lineari a coefficienti costanti)

polinomio associato: $p_1(z) - q\,p_2(z)$ $\rightsquigarrow$ <u>polinomio di stabilità</u> del metodo

Domanda: per quali valori dei coefficienti del polinomio di stabilità si ha $y_n \to 0$ per $n \to \infty$?

(<u>def</u>: <u>regione di assoluta stabilità</u> di un metodo è definita come

$$S_A = \{ q \in \mathbb{C} \mid \text{la successione } \{y_n\} \text{ generata per il problema test } (*) \text{ tende a } 0 \}).$$

<u>Risultato</u> (che segue dalla teoria delle soluzioni delle equazioni alle diff. lineari):
si ha $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ per ogni scelta dei valori iniziali $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$
<u>se e solo se</u> tutte le radici λ del polinomio associato sono tali che
$|\lambda| < 1$

← più stringente della condizione delle radici

Quindi, $S_A = \{ q \in \mathbb{C} \mid \text{le radici di } p_1(z) - q p_2(z) \text{ hanno tutte modulo } < 1 \}$

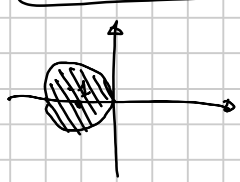
(cfr. per i metodi a un passo $S_A = \{ q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1 \}$
dove $R(q)$ era la funzione t.c. $y_{n+1} = R(q)\, y_n$)

<u>Def</u>: un metodo si dice <u>A-stabile</u> se S_A contiene il semipiano negativo

$\{ q : Re(q) < 0 \} \subseteq S_A$ $\qquad$ $q \in S_A$ per ogni q t.c. $Re(q) < 0$

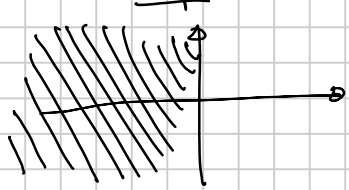
<u>Metodi a un passo</u>:

<u>Eulero esplicito</u>



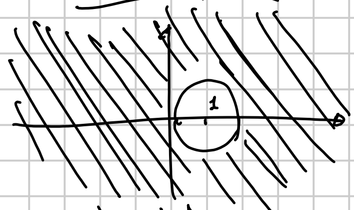
<u>non</u> A-stab.

<u>trapezi</u>



A-stab.

<u>Eulero implicito</u>



A-stab.

<u>Teo</u>: ("barriera di Dahlquist")

1) non esistono metodi lineari a più passi <u>espliciti</u> A-stabili

2) metodi lineari a più passi A-stabili (impliciti) hanno tutti ordine $p \leq 2$

3) Tra i metodi lin. a più passi A-stabili (impliciti) di ordine 2, quello per cui l'errore converge a 0 più velocemente è il metodo dei trapezi (a $k=1$ passo) $O(h^2)$

h^2
$5h^2$
$10h^2 + h^3$
$\vdots$

(Metodo dei trapezi:

$$y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right)$$

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_0 = -1 \qquad \beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$

$\rho(z) = z - 1 \qquad \sigma(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z$)

Soluzioni eq. differenziali in Matlab:

```
[t, Y] = ode45(f, [a, b], y0);
```

vettore tempi

$f(t,y)$

⚠ vettore lungo 2

$\in \mathbb{R}^m$

$$Y = \begin{bmatrix} y_0^T \\ y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_N^T \end{bmatrix}$$

← ⚠ y_n nelle righe, non colonne

$$t = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}$$

← ⚠ non equispaziati: Matlab cambia passo h a seconda del problema, per cercare di garantire una certa tolleranza sull'errore:

$\|y_n - y(t_n)\| \leq 10^{-6}$ tolleranza assoluta

$\dfrac{\|y_n - y(t_n)\|}{\|y(t_n)\|} \leq 10^{-3}$ tolleranza relativa

$$\begin{cases} y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y}_{f(t,y)} \\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$[a, b] = [0, 2\pi]$

ode45 : metodo esplicito Runge-Kutta di ordine 4 e 5, adatto a problemi non-stiff

ode15s : metodo implicito multistep BDF ordine 1-5 + metodo di Newton per sistemi multivariati per risolvere l'equazione

ode15s ha prestazioni migliori se forniamo Jacobiano $\frac{\partial f}{\partial y}$

Nel nostro caso, la Jacobiana di $f(t,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow f_1 \\ \rightarrow f_2 \end{matrix}$

sempre uguali per problemi del tipo $f(t,y)=Ay$

è

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{cases} A \xrightarrow{k_1} B \\ B+B \xrightarrow{k_2} B+C \\ B+C \xrightarrow{k_3} A+C \end{cases}$$

converte $A \Leftrightarrow B$ e viceversa

converte irreversibilmente in C

$[A]+[B]+[C] =$ costante

Sistema di Robertson

ROBERTSON

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ C: \end{array} \begin{cases} \frac{d}{dt} y^{(1)} = -K_1 y^{(1)} + K_3 y^{(2)} y^{(3)} \\ \frac{d}{dt} y^{(2)} = +K_1 y^{(1)} - K_2 (y^{(2)})^2 - K_3 y^{(2)} y^{(3)} \\ \frac{d}{dt} y^{(3)} = +K_2 (y^{(2)})^2 \end{cases}$$

$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad K_1 = 0.04 \qquad K_2 = 3 \cdot 10^7 \qquad K_3 = 10^4$