Esame di Calcolo Numerico
7 Gennaio 2022

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti)

1. Scrivere una `function xs = newton(f, df, x0, N)` che esegue N passi del metodo delle tangenti (metodo di Newton) per il calcolo di uno zero di una funzione $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dati in input *function handles* `f` e `df` che calcolano rispettivamente f e la sua derivata f', e un punto iniziale `x0`. La funzione deve restituire il vettore `xs`$\in \mathbb{R}^{N+1}$ contenente $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N]$. Riportare sul foglio il codice della funzione.

2. Riportare i valori restituiti eseguendo la funzione su

$$f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \tag{1}$$

con punto di partenza $x_0 = 0$ e $N = 5$.

3. Eseguendo la funzione anche con valori di N più grandi, controllate numericamente a quanto tende il rapporto $\frac{|x_{k+1}-1|}{|x_k-1|}$. Cosa indica questo limite sull'ordine di convergenza del metodo?

4. Qual è la molteplicità m della radice $x_* = 1$ per la funzione f in (1)? Modificare la funzione precedente per ottenere una `xsmod = newtonmod(f, df, x0, N)` che implementa il metodo di Newton modificato, utilizzando questo valore di m.

5. Riportate i valori $|x_0 - 1|, |x_1 - 1|, \ldots |x_4 - 1|$ ottenuti con il metodo di Newton modificato, con la stessa f e lo stesso valore di partenza $x_0 = 0$. Da cosa è visibile la convergenza quadratica di questo metodo modificato?

Esercizio 2 (15 punti) Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$y' = -2ty, \quad y(0) = 1, \quad [a, b] = [0, 1]. \tag{2}$$

1. Scrivere la relazione che lega y_{n+1} e y_n per il metodo di Eulero *implicito* applicato al problema (2); risolverla in funzione di y_{n+1} in modo da ricavarne un'espressione esplicita.

2. Scrivere una `function [t, Y] = euleroimplicito(N)` che applica il metodo di Eulero implicito al problema (2), utilizzando l'espressione ricavata al punto precedente per il calcolo di y_{n+1} ad ogni passo. Riportare sul foglio il codice della funzione.

3. Per $N \in \{50, 100, 200\}$, riportare l'errore globale massimo $\max_{n=1,\ldots,N} |y_n - y(t_n)|$ tra la soluzione numerica e quella esatta (quest'ultima si può calcolare tramite Matlab con `exp(-t.^2)`). Cosa indicano i valori ottenuti sull'ordine di convergenza del metodo?

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1.
```
function xs = newton(f, df, x0, N)
xs = zeros(N+1,1);
xs(1) = x0;
for i = 1:N
    xs(i+1) = xs(i) - f(xs(i)) / df(xs(i));
end
```

```
         0
    0.4000
    0.6526
    0.8065
    0.8960
    0.9457
```

3. Il rapporto tende a 0.5. Questo indica che il metodo converge a $x_* = 1$ con ordine di convergenza 1 (linearmente). Questo non contraddice la teoria, poiché si ha $f'(1) = 0$ e quindi la funzione non ha uno zero semplice in $x_* = 1$.

4. Si ha $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2$, quindi 1 è uno zero di f con molteplicità $m = 2$. Per modificare la funzione, basta aggiungere un fattore 2 di fronte `f(xs(i))`:

```
function xs = newton(f, df, x0, N)
xs = zeros(N+1,1);
xs(1) = x0;
for i = 1:N
    xs(i+1) = xs(i) - 2*f(xs(i)) / df(xs(i));
end
```

5. I valori ottenuti (visualizzati con `format short e`) sono

```
>> f = @(x) x^3-4*x^2+5*x-2;
>> df = @(x) 3*x^2-8*x+5;
>> xsmod = newtonmod(f, df, 0, 4);
>> format short e
>> abs(xsmod-1)
ans =
   1.0000e+00
   2.0000e-01
   1.5385e-02
   1.1567e-04
   6.6871e-09
```

La convergenza quadratica del metodo (prevista dalla teoria) è visibile dal fatto che i loro esponenti decrescono quadraticamente: -1, -2, -4, -9; ogni errore $|x_k - 1|$ è circa il quadrato di quello precedente. È possibile visualizzare anche i valori di $\frac{|x_k-1|}{|x_{k+1}-1|^2}$, che inizialmente tendono a $\frac{1}{2}$, però ben presto viene raggiunta l'accuratezza massima di $\approx 6 \cdot 10^{-9}$ e questi valori smettono di essere significativi.

Esercizio 2 (15 punti)

1. Si ha
$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - 2ht_{n+1}y_{n+1},$$
che risolta in funzione di y_{n+1} fornisce
$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + 2ht_{n+1}}.$$

2.
```
function [t, Y] = euleroimplicito(N)
a = 0;
b = 1;
h = (b-a)/N;
t = a:h:b;
Y = zeros(1, N+1);
Y(1) = 1;
for n = 1:N
    Y(n+1) = Y(n) / (1+2*h*t(n+1));
end

>> [t,Y] = euleroimplicito(50); max(abs(Y - exp(-t.^2)))
ans =
   6.4106e-03
>> [t,Y] = euleroimplicito(100); max(abs(Y - exp(-t.^2)))
ans =
   3.2289e-03
>> [t,Y] = euleroimplicito(200); max(abs(Y - exp(-t.^2)))
ans =
   1.6205e-03
```

I valori dimezzano ad ogni passo, ad indicare ordine di convergenza 1, come previsto dalla teoria per questo metodo.