Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi

Prodtto scalare in $\mathbf{R}^n$: $\langle(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$;

Prodtto vettore in $\mathbf{R}^3$: $(a,b,c)\times(\alpha,\beta,\gamma)=(b\gamma-\beta c,-(a\gamma-\alpha c),a\beta-\alpha b)$,

quindi $\langle(a,b,c)\times(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(a,b,c)\rangle=\langle(a,b,c)\times(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(\alpha,\beta,\gamma)\rangle=0$.

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^2$ la retta passante per i punti $(-3,1)$ e $(-2,-4)$; b- si scriva un'equazione della stessa retta.

Domanda 2 Le rette $(1,1)+t(1,-1)$, $t\in\mathbf{R}$ e $(2+2t,2-t)$, $t\in\mathbf{R}$ si incontrano?

Domanda 3 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ la retta passante per i punti $(1,-2,1)$ e $(-2,1,-3)$. Si scrivano equazioni della stessa retta.

Domanda 4 a- Si mostri che per ogni m le equazioni $y-mx=0$, $z=m$ definiscono una retta. b- Si mostri che le coppie di rette della famiglia così definite sono sghembe.

Domanda 5 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ il piano passante per i punti $(1,2,3)$, $(0,4,0)$ e $(0,-1,2)$. Si scriva un'equazione dello stesso piano.

Domanda 6 Quali delle seguenti coppie di rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono sghembe?

a- $(0,1,2)+t(1,1,1),\ t\in\mathbf{R};\quad \begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$

b- $\begin{cases}-1=x+2y+z\\-2=x-y+z\end{cases};\quad\begin{cases}1=x+y+z\\0=x-2y+z\end{cases}$

c- $(2t-3,2t-1,2t+2),\ t\in\mathbf{R},\quad\begin{cases}1=x-2y+z\\5=4x-3y+z\end{cases}$

Domanda 7 Si scrivano le equazioni dei piani del fascio passante per la retta $(2t-3,2t-1,2t+2),\ t\in\mathbf{R}$.

Domanda 8 Si calcolino i prodotti *scalare* e *vettore* tra $(1,2,3)$ e $(-1,2,-3)$.

Domanda 9 Si calcoli il coseno dell'angolo tra le rette in $\mathbf{R}^4$ date da $(2t-3,2t-1,2t+2,t),\ t\in\mathbf{R}$, e da $(t-3,t-1,t+2,t),\ t\in\mathbf{R}$.

Domanda 10 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,1,2)$.

Domanda 11 Si scriva l'equazione del piano passante per il punto $(1,1,1)$ e la retta di equazioni $\begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$.

Domanda 12 Si scriva un'equazione del piano per $(1,1,1)$ parallelo a quello dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 13 Si scrivano delle equazioni per una retta passante per $(1,1,1)$ e che non interseca il piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 14 a- Si trovi la distanza tra i due piani definiti rispettivamente da $2x-2y+2z=4$ e $x-y+z=2$.

b- Si determini l'equazione dei due piani paralleli, rispettivamente contenenti le due rette sghembe $(0,1,2)+t(1,1,1),\ t\in\mathbf{R};\ \begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$

c- Si calcolii la distanza tra le due rette.

Domanda 15 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto al piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 16 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dal piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 17 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto alla retta data da $\begin{cases}1=3x+4y+5z\\0=x+y+z\end{cases}$

Domanda 18 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dalla retta data da $\begin{cases}1=3x+4y+5z\\0=x+y+z\end{cases}.$

Domanda 19 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,1,2)$, e si calcoli la distanza dello stesso dal punto $(-1,-1,-1)$.

Domanda 20 Siano $v=(a,b)$, $w=(A,B)$ in $\mathbf{R}^2$: $aB-Ab=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ non entrambi nulli per cui $\lambda v+\mu w=(0,0)$, cioè v e w sono paralleli.

Domanda 21 Siano $v=(a,b,c)$, $w=(A,B,C)$ in $\mathbf{R}^3$: $aB-Ab=0$, $bC-Bc=0$ e $aC-Ac=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ non entrambi nulli per cui $\lambda v+\mu w=(0,0,0)$, cioè v e w sono paralleli.

ESERCITAZIONE 1, 5/10/22

$F: A \longrightarrow B$

$\operatorname{Im}_A F = \{ b \in B : \exists a \in A \; b = F(a) \}$

$C \subseteq B$

$F^{-1}(C) = \{ a \in A : F(a) \in C \}$

in particolare se $C = \{b\}$

$F^{-1}(\{b\}) = \{ a \in A : b = F(a) \}$

$$F : A \longrightarrow B$$

$$G : A \longrightarrow D$$

$$(F, G) : A \longrightarrow B \times D$$

$$\left\{ a \in A : \begin{cases} F(a) = b \\ G(a) = d \end{cases} \right\} \quad = \left\{ (x, y) : x \in B \text{ e } y \in D \right\}$$

$$= \{ a \in A : F(a) = b \text{ e } G(a) = d \}$$

$$= F^{-1}(\{b\}) \cap G^{-1}(\{d\})$$

$$= (F, G)^{-1}(\{(b, d)\})$$

I foglio

D.1 a) $P(-3,1)$ $Q(-2,-4)$ scrivere in parametrica la retta per questi punti.

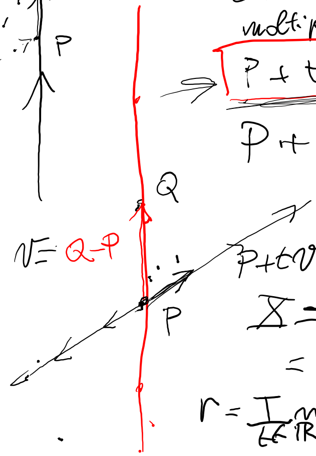
somma vettori

moltiplicare vettori per numero

$\Rightarrow$ $\boxed{P + t\cdot(Q-P)}$

$P + D\cdot(\ldots)$

$$\begin{cases} x = -3+t \\ y = 1 - t5 \end{cases}$$



$v = Q-P$

$P + tv$

$$\overset{P}{(-3,1)} + t\left[\overset{Q}{(-2,-4)} \overset{-}{-} \overset{P}{(-3,1)}\right]$$

$$X = (-3,1) + t(1,-5)$$

$$= (-3+t,\ 1-5t)$$

$$r = \operatorname{Im}_{t\in\mathbb{R}}(-3+t,\ 1-5t)$$

$$\begin{cases} x = t-3 \\ y = -5t+1 \end{cases}$$

D3R

$P(1,-2,1) \quad Q(-2,1,-3)$

retta in forma parametr...

$$r = \{P + t\,\underline{(Q - P)},\ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\left\{(x\,y\,z) : \exists\, t \begin{cases} x = 1 + t(-3) = 1 - 3t \\ y = -2 + t3 = -2 + 3t \\ z = 1 + t(-4) = 1 - 4t \end{cases}\right\}$$

$$\left\{(x\,y\,z) \overset{\exists t}{=} \boxed{(1,-2,1) + t(-3,3,-4)}\right\}$$

$$(1,-2,1) + \underline{t \sin t}(-3,3,-4)$$

D16

$r = \{(t-3, -5t+1) : t \in \mathbb{R}\}$

voglio l'equazioni (e)

z

$x \in z$

$\Updownarrow$

$x = P$

$z = \{P\}$

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix} \begin{cases} x = t-3 \\ y = -5t+1 \end{cases} \qquad \mathrm{I}\cdot 5 \begin{cases} 5x = 5t - 15 \\ y = -5t+1 \end{cases}$$

$\mathrm{I}+\mathrm{II}$ $\quad 5x + y = -15 + 1$

$5x + y = -14$

D3b

$$\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{matrix} \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}\cdot 4 + \mathrm{III}\cdot 3 \end{matrix} \begin{cases} x + y = -1 \\ 4y + 3z = -5 \end{cases}$$

$r = \{(x,y,z) : x+y+1 = 0 \text{ e } 4y+3z+5=0\}$

$= F^{-1}(\{(0,0)\}) \qquad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 4y+3z+5 \end{pmatrix}$

ESERCITAZIONE 2 6/10/22

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. a- Si scrivano le equazioni della retta ottenuta proiettando ortogonalmente la retta di equazioni $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$ sul piano di equazione $x + 2y + 3z = 4$.
b- Si calcoli la distanza del punto $(1, 1, 1)$ da tale retta.

$(1\ 3\ 1) = t(1\ -1\ 1)$

$\begin{cases} 1 = t \\ 3 = -t \\ 1 = t \end{cases}$

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

$S \quad (x\,y\,z)\cdot(1,3,1) \qquad T$

Esercizio 2. a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$ sono sghembe.

$(x\,y\,z)\cdot(1\,-1\,1)$

SONO RETTE $\quad (1\,3\,1) \nparallel (1\,-1\,1) \quad (1\,1\,1) \nparallel (1\,-1\,2)$

b- Trovare l'unica coppia di piani parelli ognuno contenente una delle due precedenti rette.
c- Per quale tra i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (1, 0, 0)$ passa una retta che interseca le rette date?

1. Proposta vediamo se sono parallele
1.1 mettiamo in forma parametrica
1.2 obbiezione me prima non conviene vedere altro?

2. Se sono incidenti
↳ conviene non metterle in forma parametrica

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x - y + z = -2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ x - y = -4 \\ x + y = -1 \\ (x - y = -4) \end{cases}$

$II + III$

$x = -5/2$

$3y = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad II - IV$

$y = 4 - 5/2 = 3/2 \quad -z = -2$

$z = 2$

Per 2 le due rette non sono incidenti

Usiamo la proposta 1.1

S $\quad I - II \quad 4y = 2 \quad y = \frac{1}{2}$

$x + z = -3/2 \qquad x = -z - \frac{3}{2}$

$(x + z = 1/2 - 2 = -3/2) \qquad y = 1/2$

$z = z$

$(-3/2, \frac{1}{2}, 0) + t(-1, 0, 1)$

T $\quad II - I$

$z - 2y = -1$

$z = 2y - 1$

$x = -y - 2y + 1$

$y = y$

$(1\,0\,-1) + t(-3, 1, 2)$

↳ $II - I \qquad z = 2y - 1$

$1 = x + y + 2y - 1$

$x = 2 - 3y$

$t(-3, 1, 2) + (2, 0, -1)$

Es 2b Trovare l'unica coppia di piani paralleli contenenti ognuno uno delle due rette

$$\underbrace{(-3/2, 1/2, 0) + t(-1, 0, 1)}_{v}$$

$$(\cancel{1}\,2\ 0\ -1) + t\underbrace{(-3\ 1\ 2)}_{w}$$

$P + tv$

$Q + tw$

piano per l'origine contenente v e w ($v \not\parallel w$)

$sv + tw$

$s, t \in \mathbb{R}$

$(s,t) \in \mathbb{R}^2$

il passante per l'origine parallelo a quelli che contengono uno delle due rette sarà

$\underset{sv}{(-s, 0, s)} + \underset{tw}{(-3t, t, 2t)}$

$(-s-3t, t, s+2t)$

$$\begin{cases} x = -s-3t \\ y = t \\ z = s+2t \end{cases}$$

$3\text{II} + \text{I}$

$2\text{II}\ \text{III}$

$3y + x = -s$

$2y - z = -s$

$3y + x = 2y - z$

$$\boxed{x + y + z = 0}$$

i miei due piani sono ortog. a $(1, 1, 1)$

$x + y + z = p$

$x + y + z = q$

come trovo i termini noti $1 + 0 - 1 = 0$

$-3/2 + \frac{1}{2} = p$ $q = 0$

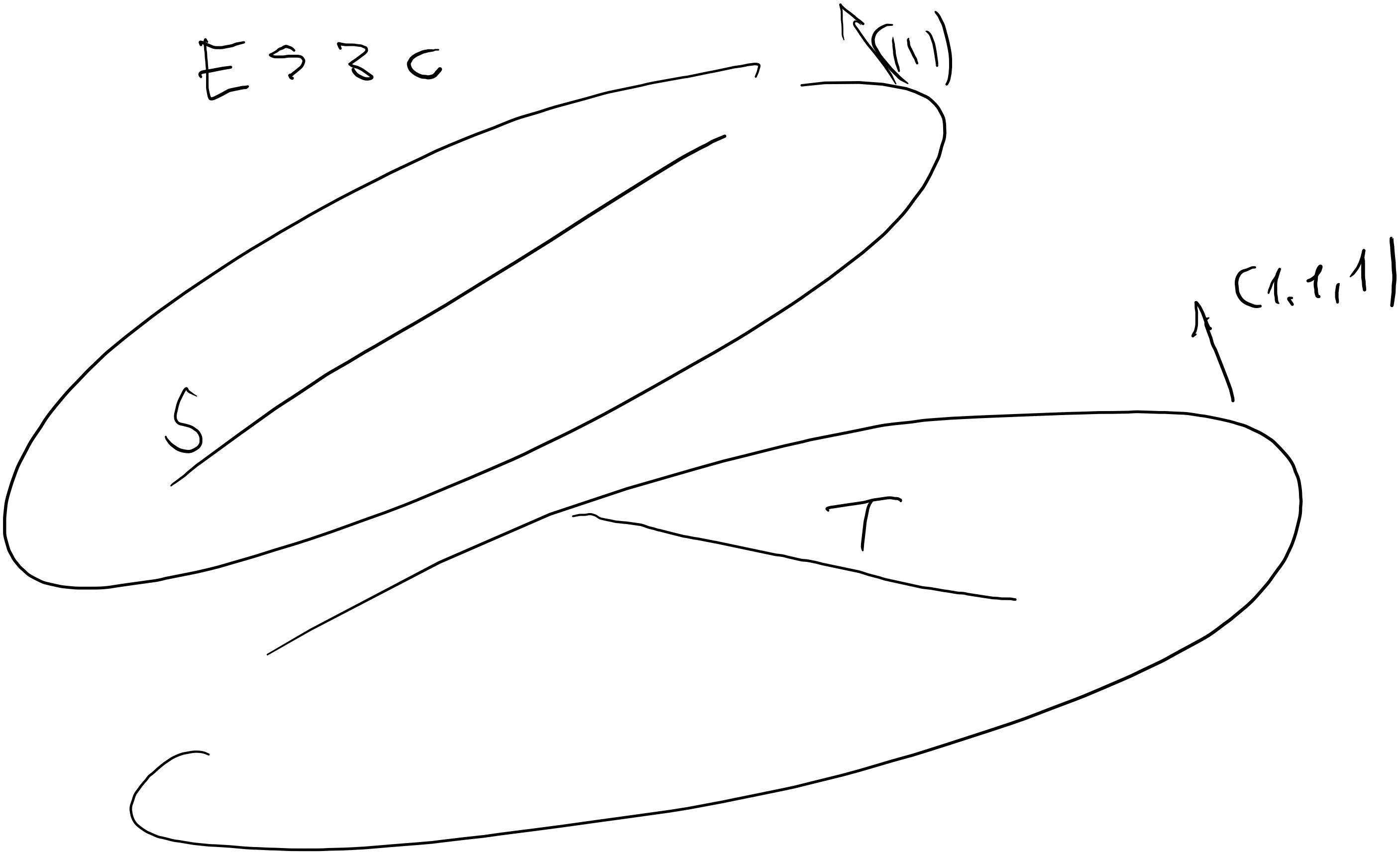
$x + y + z = -1$

$\Leftrightarrow P + sv + tw$

$x + y + z = 0$

$\Leftrightarrow Q + sv + tw$

Es 3 c



per quali t.re P(111) Q(100)

passa una retta

che interseca sia S che T ?

SUGG: retta più punto = piano   considerare uno dei due punti e una delle due rette

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = 2x - y + z \end{cases}$ sono sghembe.
b- Si discuta se esiste un piano contenente la prima retta ed ortogonale alla seconda: nel caso se ne scriva l'equazione.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Aggiunta al primo foglio di esercizi

Esercizio 4.

1. Si considerino le rette $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$: si dimostri che ognuna è sghemba con la retta $\begin{cases} 0 = x - z \\ 1 = x - y + z \end{cases}$.

2. Trovare una quarta retta che interseca tutte le tre precedenti (cfr. esercizio 2.c).