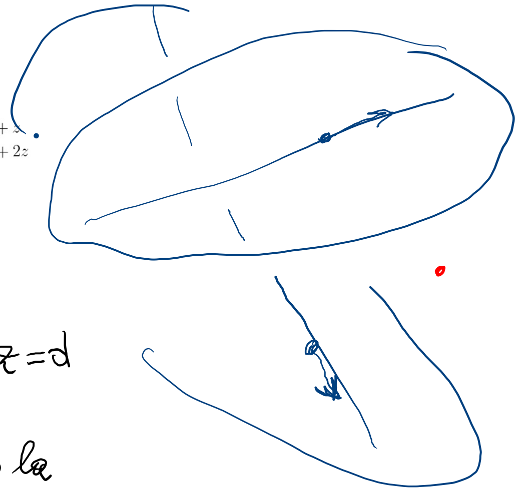
# Esercitazione 3, 12/10/22

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

**Primo foglio di esercizi:**
**esercizi formato esame**



**Esercizio 2.** a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x+3y+z \\ -2 = x-y+z \end{cases}$ ; $\begin{cases} 1 = x+y+z \\ 0 = x-y+2z \end{cases}$ sono sghembe.

b- Trovare l'unica coppia di piani parelli ognuno contenente una delle due precedenti rette.

c- Per quale tra i punti $P = (1,1,1)$ e $Q = (1,0,0)$ passa una retta che interseca le rette date?

Da quanto fatto al punto b, i due piani sono del tipo $x+y+z=d$ e uno deve contenere la retta $(-3/2, 1/2, 0)+t(-1,0,1)$, e l'altro la retta $(2, 0, -1)+t(-3,2,1)$:
quindi il piano per la prima retta è $x+y+z = -3/2+1/2 = -1$
quello per la seconda
$x+y+z = 2-1 = 1$

$2-3t=1$
$2t=0$

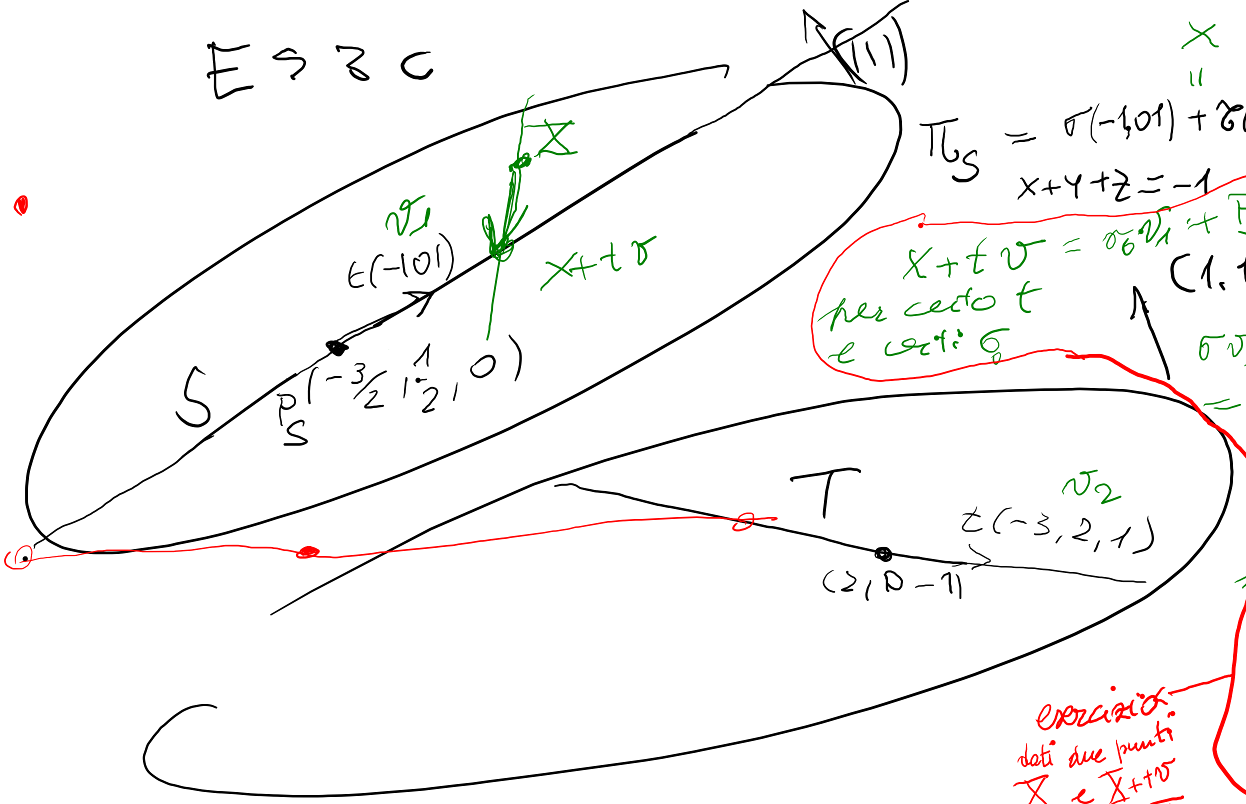
$P(a\,b\,c)$
$\pi \perp (\alpha,\beta,\gamma)$ per $P$

$\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$
$\alpha x+\beta y+\gamma z = \alpha a+\beta b+\gamma c$

c- per quanto fatto nell'argomento generale qui di seguito basta verificare se i punti P e Q appartengono o meno ai due piani (tranne le due rette)

P va bene non sta nei due piani $1+0+0=1$ ma non sta nella seconda retta sta nel secondo piano

Es 3 c




$\pi_S = \sigma(-1,0,1) + \tau(-3,2,1) + P_S$

$x+y+z=-1$

$(1,1,1)$

$X + t v = \sigma_0 v_1 + P_S$ per certo $t$ e certi $\sigma_0$

$\sigma v_1 + \tau v_2 + \cancel{P_S} + t v = \sigma_0 v_1 + \cancel{P_S}$

$v = \frac{\sigma_0 - \sigma}{t} v_1 + \frac{-\tau}{t} v_2$

esercizio: dati due punti $X$ e $X+tv$ nel piano $\pi_S$ mostrare che le rette per essi giace nel piano stesso

per quali altre $P(111)$ $Q(100)$ passa una retta che interseca sia S che T ?

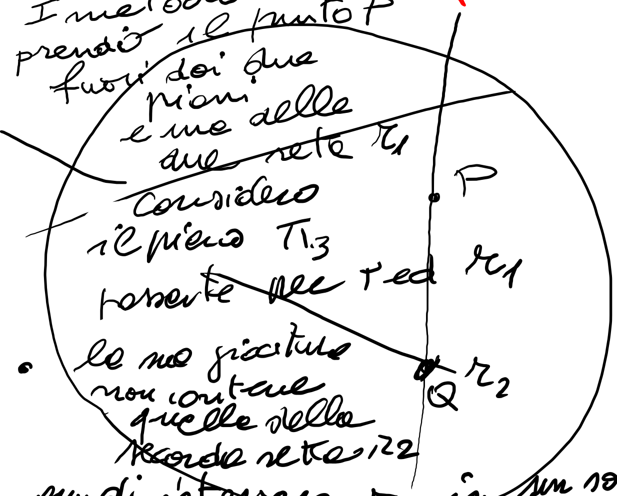
SUGG: retta più punto = piano considerare uno dei due punti e una delle due rette

# Argomento generale

date due rette sghembe
per quali punti passa una retta
che le interseca entrambe (in punti diversi da lui")

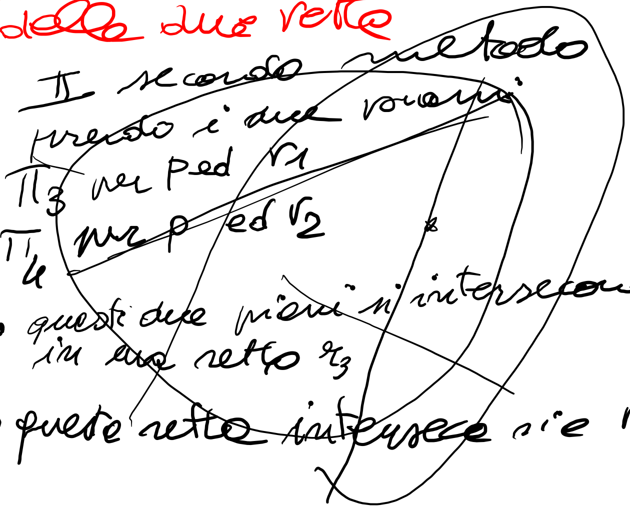
mezza congettura: per tutti e soli
i punti che non stanno
sui due piani che contengono
rispettivamente
ognuno una delle due rette

I metodo
prendo il punto P
fuori dai due piani
e una delle due rette $r_1$
Considero il piano $\Pi_3$
passante per P ed $r_1$




• le sue giaciture non contiene quelle della seconda retta $r_2$
• quindi interseca $r_2$ in un solo punto Q
• la retta $r_3$ per PQ interseca $r_1$

II secondo metodo
prendo i due piani
$\Pi_3$ per P ed $r_1$
$\Pi_4$ per P ed $r_2$



• questi due piani si intersecano in una retta $r_3$
• questa retta interseca sia $r_1$ che $r_2$

I DIMOSTRAZIONE

$r_1 = \{P_1 + t v_1\}_{t \in \mathbb{R}}$

$\pi_3$ piano per $P$ ed $r_1$

$\mathcal{G}\pi_3$ giacitura di $\pi_3$ contiene $t v_1$

a) si dimostra che $\pi_3$ interseca la seconda retta $r_2 = \{P_2 + t v_2\}_{t \in \mathbb{R}}$ ($v_1$, $v_2$ non paralleli, quindi non nulli)

se non intersecasse $r_2$ allora $\pi_3$ conterrebbe $t v_2$

quindi $\pi_3$ sarebbe del tipo $P + s v_1 + t v_2$

cioè sarebbe parallelo a $\pi_1$ e $\pi_2$ ($\pi_3 \cap \pi_1 = \emptyset$)

ciò non è possibile perché $\pi_3 \supseteq r_1 \subseteq \pi_1$

(non può coincidere con $\pi_1$ o $\pi_2$ poiché $P \in \pi_3$ ma $P \notin \pi_1$ e $P \notin \pi_2$)

b) sia $Q$ l'intersezione di $\pi_3$ con $r_2$ ($Q \in r_2$)

consideriamo la retta $r_3$ per $P$ e $Q$: essa interseca $r_1$

- $r_3$ (per quanto visto all'inizio $P, Q \in \pi_3 \Rightarrow r_3 \subseteq \pi_3$) è cont. in $\pi_3$
- anche $r_1$ giace su $\pi_3$ due rette complanari

o coincidono (NO $P \in r_3$ $P \notin r_1$) o son parallele o incidenti

escludiamo che siano parallele: se lo fossero $\vec{PQ} \in \mathcal{G}\pi_1 = \mathcal{G}\pi_2$

$\pi_5$ parallelo a $\pi_1$ e $\pi_2$ per cui $r_3 \subseteq \pi_5$ $Q \in \pi_2 \cap \pi_5 \Rightarrow \pi_2 = \pi_5$

$\{(x\,y\,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$

Quindi $r_3 \subseteq \Pi_2$ non è possibile poiché $P$ sta in $r_3$ per costruzione ma non sta in $\Pi_2$ per ipotesi

---

II metodo come metodo per trovare le equazioni per la retta $r_3$ che intersechi le due sghembe e passi per $P$

$r_1$ $\qquad$ $r_2$

a $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$

Piano $\Pi_3$ piano per $P$ ed $r_1$

piano $\Pi_4$ piano per $P$ ed $r_2$

equazione di $r_3$ è $\begin{cases} \text{equazione } \Pi_3 \\ \text{equazione } \Pi_4 \end{cases}$

FASCIO PER $r_1$ $(a^2+b^2\neq 0)$ $\qquad$ $P(1\,1\,1)$

$ax+3ay+az+bx-by+bz=-2b$

$(a+b)x+(3a-b)y+(a+b)z=-2b$

impongo che passi per $P$

$5a+b=-2b \quad 5a=-3b \quad a=3,\ b=-5$

$\boxed{\Pi_3 \quad -2x+14y-2z=10}$

PIANO PER $r_2$ e $P$ $(a^2+b^2\neq 0)$

$(a+b)x+(a-b)y+(a+2b)z=a$

$3a+2b=a \qquad 2a=-2b$

$a=1 \quad b=-1$

$\boxed{\Pi_4 \quad 2y-z=1}$

## Esercizio

provare usando le equazioni piuttosto che le forme parametriche che dati due punti $P(a,b,c)$ $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ su un piano $\pi$ $Ax+By+Cz=D$ la retta per $P$ e $Q$ giace su $\pi$.

$\langle X \cdot V \rangle = \langle P \cdot V \rangle$
$ax + by + cz = \langle P \cdot V \rangle$

$v = (a\,b\,c)$ coeff. $x\,y\,z$
$X = (x, y, z)$
$P \cdot V$ terme noto

**Primo foglio di esercizi: esercizi formato esame**

EQUAZIONE PIANO $\langle X - P \cdot V \rangle = 0$ $\quad x + z = t$

$$\begin{cases} 1 = t + y \\ 0 = x - y + t \end{cases}$$
$y = 1 - t$
$x = 1 - 2t$
$z = 3t - 1$

**Esercizio 3.** a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$ ; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = 2x - y + z \end{cases}$ sono sghembe.

b- Si discuta se esiste un piano contenente la prima retta ed ortogonale alla seconda: nel caso se ne scriva l'equazione.

b) • FASCIO DI PIANI PRIMA RETTA

$(a+b)x + (a-b)y + (a+b)z = a$
$= -2b$
$a^2 + b^2 \neq 0$

• FORMA PARAMETRICA SECONDA RETTA

$(1-2t, 1-t, 3t-1)$
$(1, 1, -1) + t(-2, -1, 3)$

IMPONGO
$(a+b) = -2\lambda$
$(3a-b) = -1\lambda$
$(a+b) = 3\lambda$ $\quad a^2 + b^2 \neq 0$

NON HA SOLUZIONI

$Ax + By + Cz = D$
PIANO ORTOGONALE A RETTA $P + t(\alpha, \beta, \gamma)$
$A = \lambda\alpha$ $\quad B = \lambda\beta$ $\quad C = \lambda\gamma$

a) $x + 3y + z = 0$ $\qquad x = -3y - z$
$x - y + z = -2 \to -3y - z - y + z = -2 \to -4y = -2$ $\qquad y = \frac{1}{2}$

$x + y + z = 1 \to -3y - z + y + z = 1$ $\qquad -2y = 1$ $\qquad y = -\frac{1}{2}$
$2x - y + z = 0$

o sono parallele o sghembe

Se fossero parallele sarebbero complanari.
o si mette in forma parametrica e si vede che le giaciture delle due rette non sono un multiplo dell'altro (non sono allineati con l'origine)
o si mostra che una retta non è nel fascio dell'altra

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$
I–II $\quad 4y = 2$ $\quad y = \frac{1}{2}$
$x + z = -\frac{3}{2}$ $\quad z = -x - \frac{3}{2}$

$(a+2b)x + (a-b)y + (a+b)z = a$

$(\cancel{a} + \cancel{2}b)x + \frac{(a-b)}{2} - (\cancel{a} + \cancel{b})x - \frac{3}{2}(a+b) = a$

$bx = \frac{3}{2}(a+b) - \frac{a-b}{2} + a = 2a + 2b$

$b \neq 0$ c'è una sola soluz. $\quad x = 2\frac{a}{b} + 2$

per $b = 0$ dovrebbe essere $a = 0$
$\to a(x + y + z) = a$ $\quad a \neq 0$ $\quad x + y + z = 1$ $\quad$ non ho soluzioni
$a = 0$ esclus

Altra idea della studentessa Francesca

P Punto della prima retta $r_1$

fascio di piani per la seconda $r_2$

imponendo l'appartenenza di P

ottengo un piano $ax+by+cz=d$

punto della $r_2$

fascio di piani per $r_1$

impongo l'appartenenza di Q

ottengo un piano $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$

Se le due rette fossero parallele

i due piani dovrebbero coincidere

cioè $\lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)+\mu(a\,b\,c\,d)=(0\,0\,0\,0)$

**Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20**
**ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli**
**Aggiunta al primo foglio di esercizi**

**Esercizio 4.**

Es 2a: sono sghembe

1. Si considerino le rette $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$ ; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$ : si dimostri che ognuna è sghemba con la retta $\begin{cases} 0 = x - z \\ 1 = x - y + z \end{cases}$.

2. Trovare una quarta retta che interseca tutte le tre precedenti (cfr. esercizio 2.c).

prendo i due piani paralleli che contengono ognuno una delle prime due rette $x+y+z=1$ $x+y+z=-1$ e prendo un qualsiasi punto della terza retta che non sta nei due piani

$x=z$ $\quad x=1 \quad z=1 \quad y=1 \quad P(1\,1\,1)$

$1=2x-y \quad 1=2-y \quad y=2-1$

$\pi_3$ e $\pi_4$ $\quad \begin{cases} -2x+14y-2z=10 \\ 2y-z=1 \end{cases}$