Esercitazione 4 20 ottobre

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi

Prodtto scalare in $\mathbf{R}^n$: $\langle (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \rangle \ = \ x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$;

Prodtto vettore in $\mathbf{R}^3$: $(a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) = (b\gamma - \beta c, -(a\gamma - \alpha c), a\beta - \alpha b)$,

quindi $\langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a, b, c) \rangle = \langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \rangle = 0$.

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^2$ la retta passante per i punti $(-3, 1)$ e $(-2, -4)$; b- si scriva un'equazione della stessa retta.

Domanda 2 Le rette $(1, 1) + t(1, -1)$, $t \in \mathbf{R}$ e $(2 + 2t, 2 - t)$, $t \in \mathbf{R}$ si incontrano?

Domanda 3 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ la retta passante per i punti $(1, -2, 1)$ e $(-2, 1, -3)$. Si scrivano equazioni della stessa retta.

Domanda 4 a- Si mostri che per ogni m le equazioni $y - mx = 0$, $z = m$ definiscono una retta. b- Si mostri che le coppie di rette della famiglia così definite sono sghembe.

Domanda 5 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ il piano passante per i punti $(1, 2, 3)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, -1, 2)$. Si scriva un'equazione dello stesso piano.

Domanda 6 Quali delle seguenti coppie di rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono sghembe?

a- $(0, 1, 2) + t(1, 1, 1), \ t \in \mathbf{R}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$

b- $\begin{cases} -1 = x + 2y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - 2y + z \end{cases}$

c- $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2), \ t \in \mathbf{R}$, $\begin{cases} 1 = x - 2y + z \\ 5 = 4x - 3y + z \end{cases}$

Domanda 7 Si scrivano le equazioni dei piani del fascio passante per la retta $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2), \ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 8 Si calcolino i prodotti *scalare* e *vettore* tra $(1, 2, 3)$ e $(-1, 2, -3)$.

Domanda 9 Si calcoli il coseno dell'angolo tra le rette in $\mathbf{R}^4$ date da $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2, t), \ t \in \mathbf{R}$, e da $(t - 3, t - 1, t + 2, t), \ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 10 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(0, 1, 2)$.

Domanda 11 Si scriva l'equazione del piano passante per il punto $(1, 1, 1)$ e la retta di equazioni $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$.

Domanda 12 Si scriva un'equazione del piano per $(1, 1, 1)$ parallelo a quello dato da $3x + 4y + 5z = 1$.

Domanda 13 Si scrivano delle equazioni per una retta passante per $(1, 1, 1)$ e che non interseca il piano dato da $3x + 4y + 5z = 1$.

Domanda 14 a- Si trovi la distanza tra i due piani definiti rispettivamente da $2x - 2y + 2z = 4$ e $x - y + z = 2$.

I foglio D. 14

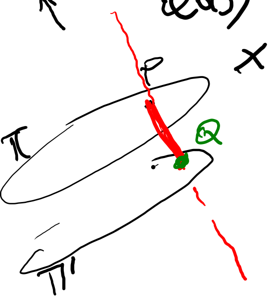
a) distanza tra i due piani

$2x-2y+2z=4 \qquad x-y+z=2$

sono due equazioni equivalenti quindi identificano lo stesso piano perciò la distanza è 0.

$|v| = \sqrt{\langle v\cdot v\rangle} = d(v,\vec{0})$

v $(1,-1,1)$



a bis) distanza tra

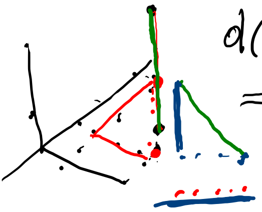
$x-y+z=2 \quad \pi' \qquad x-y+z=1 \quad \pi$

$P(1,0,0)$

$P+tv = (1\ 0\ 0)+(t,-t,t) = (1+t,-t,t)$

$1+t-(-t)+t=2 \qquad 3t=1 \qquad t=\frac{1}{3}$

$Q\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$



$$d(\pi,\pi') = d(P,Q) = \sqrt{\underbrace{\langle P-Q\cdot P-Q\rangle}_{|P-Q|^2}} = \sqrt{\left|(1\,0\,0)-\left(\tfrac{4}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right|^2} = \sqrt{\left(1-\tfrac{4}{3}\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

NOTA

qualsiasi cosa sia la distanza tra due punti $d(P,Q)$ se prendo due sottoinsiemi A,B dell'ambiente ove è definita la distanza tra punti

$$d(A,B) = \inf\{d(P,Q) : P\in A,\ Q\in B\}$$

Distanza tra piani paralleli

$v \neq \vec{0}$

$(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

$ax+by+cz=d \qquad \pi \qquad \langle \vec{v} \cdot P \rangle = d \qquad P(x\,y\,z)$

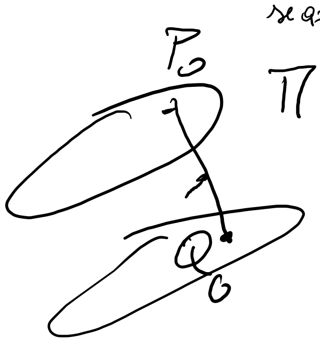
$ax+by+cz=d' \qquad \pi' \qquad \langle \vec{v} \cdot P \rangle = d' \qquad v(a\,b\,c)$

$P_0 \in \pi \quad P_0(x_0\,y_0\,z_0) \quad P(t) = P_0 + tv \longrightarrow$ eq. π'

esempio $\circledast$ $\langle v \cdot P_0 \rangle = d \qquad \langle \vec{v} \cdot P(t) \rangle = d'$

se $a \neq 0$ $P_0\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$

$\sqrt{A^2} = |A|$



$\langle v \cdot P_0 + tv \rangle = d'$

$\langle v \cdot P_0 \rangle + \langle v \cdot tv \rangle = d'$

$\langle v \cdot P_0 \rangle + t \langle v \cdot v \rangle = d'$

$t_0 = \frac{d' - \langle v \cdot P_0 \rangle}{\langle v \cdot v \rangle} \overset{\circledast}{=} \frac{d'-d}{\langle v \cdot v \rangle}$

$Q_0 = P_0 + t_0 v$

$d(\pi, \pi') = d(Q_0, P_0) = \sqrt{\langle Q_0 - P_0 \cdot Q_0 - P_0 \rangle} =$

$= \sqrt{\langle t_0 v \cdot t_0 v \rangle} = \sqrt{t_0^2 \langle v \cdot v \rangle} =$

$= \sqrt{t_0^2}\sqrt{\langle v \cdot v \rangle} = |t_0| \sqrt{\langle v \cdot v \rangle} = \frac{|d'-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\langle v \cdot v \rangle = a^2+b^2+c^2$

$\left| \frac{d'-d}{\cancel{\langle v \cdot v \rangle}\ \sqrt{\langle v \cdot v \rangle}} \right| \cdot \cancel{\sqrt{\langle v \cdot v \rangle}}$

b- Si determini l'equazione dei due piani paralleli, rispettivamente contenenti le due rette sghembe $(0,1,2)+t(1,1,1),\ t \in \mathbf{R}$; $\begin{cases} 1 = x+y+z \\ 0 = x-y+z \end{cases}$

c- Si calcolii la distanza tra le due rette.

Domanda 15 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto al piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 16 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dal piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 17 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto alla retta data da $\begin{cases} 1 = 3x+4y+5z \\ 0 = x+y+z \end{cases}$

Domanda 18 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dalla retta data da $\begin{cases} 1 = 3x+4y+5z \\ 0 = x+y+z \end{cases}$.

Domanda 19 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,1,2)$, e si calcoli la distanza dello stesso dal punto $(-1,-1,-1)$.

Domanda 20 Siano $v=(a,b)$, $w=(A,B)$ in $\mathbf{R}^2$: $aB-Ab=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ per cui $\lambda v+\mu w=(0,0)$, cioè v e w sono paralleli.

Domanda 21 Siano $v=(a,b,c)$, $w=(A,B,C)$ in $\mathbf{R}^3$: $aB-Ab=0$ e $bC-Bc=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ per cui $\lambda v+\mu w=(0,0,0)$, cioè v e w sono paralleli. Si noti che ne segue anche $aC-Ac=0$.

$\langle v\cdot v\rangle$
$= 9+16+25$

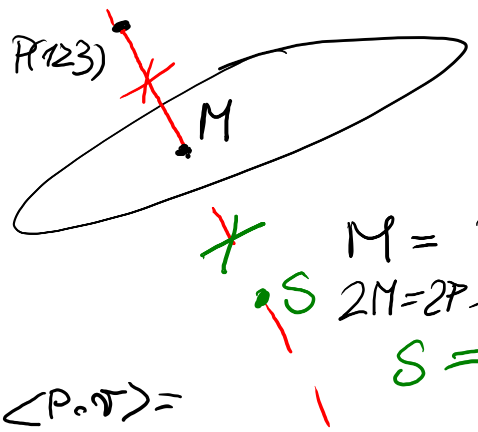
$v(3\,4\,5)$

$P \quad M \quad S$

$d(M,S) = d(M,P)$
$= \dfrac{d(PS)}{2} = \dfrac{|P-S|}{2}$

D.15 simmetrico di $P(1\,2\,3)$ rispetto π $3x+4y+5z=1$

$P \notin \pi$



$\langle P+vt\cdot v\rangle = 1$

$t = \dfrac{1-\langle P v\rangle}{\langle v\cdot v\rangle}$

$P \quad M \quad S$

$\boxed{M = \dfrac{P+S}{2}}$

$M = P + v\,\dfrac{1-\langle Pv\rangle}{\langle v\cdot v\rangle}$

$2M = 2P + 2v\ldots$

$S = 2M - P =$

$2M - P = S$

$\langle P\cdot v\rangle =$
$\langle (1\,2\,3)(3\,4\,5)\rangle =$
$= 3+8+15$

$= P + 2v\,\dfrac{1-\langle Pv\rangle}{\langle v\cdot v\rangle} = (1\,2\,3) + (6\,8\,10)\,\dfrac{-25}{50} =$

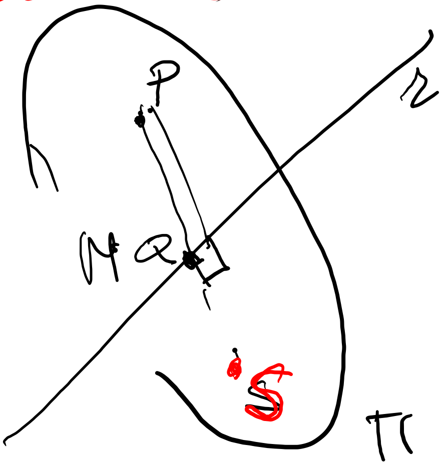
$= (1\,2\,3) - (3\,4\,5) = (-2\,-2\,-2)$

I D.17

$Q = \frac{P+S}{2}$

$2Q - P = S$

simmetrico di $(1\ 2\ 3)$ P rispetto alla retta $r \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$



$r \rightarrow Q\left(-\frac{1}{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\right)$

$\pi \quad P(s,t) = P + s(3\ 4\ 5) + t(1\ 1\ 1)$

$= (1 + 3s + t,\ 2 + 4s + t,\ 3 + 5s + t)$

trovo s e t in modo che P(s,t) stia sulla retta

$$\begin{cases} 3 + \underbrace{9s}_{3x} + 3t + 8 + \underbrace{16s}_{4y} + 4t + 15 + \underbrace{25s}_{5z} + 5t = 1 \\ 1 + 3s + t + 2 + 4s + t + 3 + 5s + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -25 = 50s + 12t \\ -6 = 12s + 3t \end{cases}$$

$-2 = 4s + t$

$t = -2 - 4s$

$-25 = 50s - 24 - 48s$

$-25 = 2s - 24$ $\quad s = -\frac{1}{2} \quad t = -2 + 2 = 0$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. a- Si scrivano le equazioni della retta ottenuta proiettando ortogonalmente la retta di equazioni $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$ sul piano di equazione $x + 2y + 3z = 4$.
b- Si calcoli la distanza del punto $(1, 1, 1)$ da tale retta.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Secondo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^5$ posson essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0,0)$.
Si assuma che dati quattro elementi di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti, ogni altro elemento di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di loro multipli reali.
b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0)$, si intersecano in almeno un punto.
c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$ con intersezione non solo $\{(0,0,0,0)\}$, possono aver intersezione vuota.

Domanda 2 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sulla retta $t(1,1,2,1,3),\ t\in\mathbf{R}$.

Domanda 3 a- Mostrare che le soluzioni del sistema nelle variabili $(x,y,z,u,v)\in\mathbf{R}^5$ determinano un piano bidimensioanle $\begin{cases} x+y+3z+u+4v=0\\ x+y+3z+2u+3v=0\\ x+y-z+u+2v=0\end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale piano bidimensionale.

Domanda 4 a- Trovare delle equazioni cartesiane che determinino l'ortogonale del piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x+y+3z+u+4v=0\\ x+y+3z+2u+3v=0\\ x+y-z+u+2v=0\end{cases}$
b- Descrivere in forma parametrica tale ortogonale.

Domanda 5 Trovare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sul piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da $\begin{cases} x+y+3z+u+4v=0\\ x+y+3z+2u+3v=0\\ x+y-z+u+2v=0\end{cases}$.

Domanda 6 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ definito da
$\begin{cases} x+y+3z+u+4v=0\\ x+y+3z+2u+3v=0\\ x+y-z+u+2v=0\end{cases}$.

Domanda 7 Calcolare la distanza di $(1,2,3,4,5)$ dal piano bidimensionale di $\mathbf{R}^5$ dato in forma parametrica da $s(1,1,1,0,1)+t(1,0,1,1,1),\ t,\ s\in\mathbf{R}$.

Domanda 8 Determinare la proiezione ortogonale della retta in $\mathbf{R}^4$ data in forma parametrica $t(1,1,1,1)$, $t\in\mathbf{R}$ sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ defnto da $\begin{cases} x-y+z+u=0\\ x+y+3z+2u=0\end{cases}$.

Domanda 9a- Verificare che le equazioni $\begin{cases} x+2y+2z+u=0\\ x+y+3z+2u=0\\ x-y-z+u=0\end{cases}$, $(x,y,z,u)\in\mathbf{R}^4$,

individuano una retta in $\mathbf{R}^4$.

b- Nel caso trovare delle equazioni per la sua proiezione ortogonale sul piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ defnto da $\begin{cases} x-y+z+u=0\\ x+y+3z+2u=0\end{cases}$.

Domanda 10 Determinare la proiezione ortogonale della retta di $\mathbf{R}^4$ individuata da
$\begin{cases} x+y+z+u=0\\ x-y+z+2u=1\\ x+y+3z+2u=0\end{cases}$, sul piano defnto da $\begin{cases} x-y+z+u=0\\ x+y+3z+2u=0\end{cases}$.

II

Domanda 1 a- Mostrare con un esempio che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^5$ posson essere "sghembi", ovvero avere intersezione vuota ma con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0,0)$.

Si assuma che dati quattro elementi di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti, ogni altro elemento di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di loro multipli reali.

b- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$, che si intersecano solo in $(0,0,0,0)$, si intersecano in almeno un punto.

c- Si mostri quindi che due piani bidimensionali in $\mathbf{R}^4$ con i due piani ad essi paralleli e passanti per $(0,0,0,0)$ con intersezione non solo $\{(0,0,0,0)\}$, possono aver intersezione vuota.

TROVARE $u, v, u', v' \in \mathbb{R}^5$ e $P, P' \in \mathbb{R}^5$

a) $P + su + tv$ $\quad \pi$ $\qquad P' + \sigma u' + \tau v'$ $\quad \pi'$

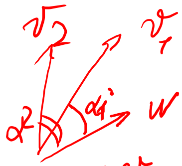
u, v linearm. indip. $\qquad u', v'$ lin. indip

$\pi \cap \pi' = \emptyset$ $\qquad \text{Giac.}\,\pi \cap \text{Giac}\,\pi' = \{\vec{O}\}$

$\{su + tv : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$ $\qquad \vec{O}_{\mathbb{R}^5} = (0,0,0,0,0)$

$\mathbb{R}^n \ni v = (x_1 \cdots x_n)$

$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$



$|v_i| \cdot |w| \cos \alpha_i$

$\langle (x_1 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_n) \rangle$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

$\langle v_1 + v_2 \cdot w \rangle =$

$= \langle v_1 \cdot w \rangle + \langle v_2 \cdot w \rangle$

sottoesercizio

Se v e w sono non nulli e fra loro ortogonali allora sono linearmente indipendenti

DIM

sia $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lambda u + \mu v = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

$|v| \neq 0_{\mathbb{R}}$ $|w| \neq 0_{\mathbb{R}}$ $(*)$

$\langle v \cdot w \rangle = 0$ $(*)$

moltiplico scalarmente per w

$$\cancel{\lambda \langle u \cdot w \rangle} + \mu \langle w \cdot w \rangle = 0_{\mathbb{R}}$$

$(*)$

$$\mu |w|^2 = 0_{\mathbb{R}}$$

$\star$

$$\lambda u = \vec{0}$$

$$\lambda |u|^2 = 0_{\mathbb{R}} \cdot \star \quad \lambda = 0$$

$$\mu = \frac{0_{\mathbb{R}}}{|w|^2} = 0_{\mathbb{R}}$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1.

1. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ le equazioni $\begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \end{cases}$, $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$, individuano una retta?
2. Per quali tra questi parametri la retta non ha intersezione con il piano bidimensionale in $\mathbf{R}^4$ definito da $\begin{cases} x - y + z + u = 0 \\ x + y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$?
3. Per quali di quest'ultimi parametri la retta non ha traslate contenute nello stesso piano?

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2.

Si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la dimensione dell'insieme delle eventuali soluzioni del sistema nelle variabili $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4$ $\begin{cases} \alpha x + y + 3z + \alpha u = \alpha \\ x + \alpha y + 3\alpha z + 2u = \alpha + 1 \\ x + y + z + 2u = \alpha - 1 \\ \alpha x + y - z + u = 0 \end{cases}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + v + 4w = a \\ x + y + 3z + 2v + 3w = b \\ x + y - z + v + 2w = c \end{cases}$$

   nelle incognite $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$, scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 4.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 3 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & e \\ 4 & 3 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ 3x & + & 3y & - & z & = & c \\ & & & & 0 & = & d \\ x & + & 2y & + & z & = & e \\ 4x & + & 3y & + & 2z & = & f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$;
- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Secondo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 5.

1. Si riduca a scala la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 2 & b \\ 3 & 3 & -1 & -4 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & 3 & e \\ 4 & 3 & 2 & 2 & f \end{pmatrix}$.

2. Usando tale riduzione si discuta, al variare dei dati $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ il sistema

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & 2u & = & a \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & b \\ 3x & + & 3y & - & z & - & 4u & = & c \\ & & & & & & 0 & = & d \\ x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & e \\ 4x & + & 3y & + & 2z & & +2u & = & f \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^6$;
- scrivendo in forma cartesiana e in forma parametrica le condizioni sui dati per la risolubilità,
- scrivendo in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.