Esercitazione 7, 10 novembre 22

Somme dirette (in un certo senso generalizza la indipendenza lineare: vettore → retta)

con domanda 2 del secondo foglio

$M(n,n) \ni M \qquad M = S + A \quad S = {}^tS \quad A = -{}^tA$

in modo unico poiché $S(n) \cap A(n) = \{0_M\}$

. Se V è uno spazio vettoriale U, W suoi sottospazi si dice che sono in somma diretta se $U \cap W = \{0_V\}$.

$U + W = \{v \in V : \exists u \in U, \exists w \in W \ v = u + w\} =$
$= \operatorname{span}(U \cup W)$, nel caso di somma diretta si scrive $U \oplus W$

$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottospazi di V è in somma diretta se $I = H \cup K \quad H \cap K = \emptyset$

$\operatorname{span}\left(\bigcup_{h \in H} V_h\right)$

$\sum_{h \in H} V_h \cap \sum_{k \in K} V_k = (0_V) \qquad \sum_{i \in I} V_i = \bigoplus V_i$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis
Domande di introduzione

Domanda 1 Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\, A = dim\, B$.

Domanda 2 Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x + y & = & 0 \\ x - y + z + u & = & 0 \end{cases}$.
a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $Im A = Ker A = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

Domanda 3 Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ x \; + \; 2z & = & 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$.
a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $Ker L = r$, $Im L = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui
per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si abbia $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot Ly \rangle_{\mathbf{R}^m}$.
Si mostri che $L = {}^t M$.

Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)
Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^t A$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^t AA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.
c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^t AA)^{-1}\,{}^t A$ dà la proiezione ortogonale su $Im A$.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui
a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?
(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

Domanda 8 (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = O_{n\times n}$, allora:
$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

Domanda 1
A, B, U sotts. vett. di V
se $U \oplus A \overset{*}{=} U \oplus B$
allora $dim A = dim B$

DIM se $dim A = dim B = \infty$ ok
altrimenti
supponiamo $dim A = n < \infty$
$dim B \geq dim A$
se fosse $\boxed{dim B \underset{\neq}{>} dim A}$
ci sarebbero
$b_1, \dots, b_{n+1} \in B$
indipendenti ☆

$*$ uso $B \subseteq U \oplus A$
$b_i \overset{☆}{=} u_i + a_i$ vi sono $v_i \in U$, $a_i \in A$ ☆
poiché $dim A = n$ ☆ non tutti
vi sono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ nulli
$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0_V$
faccio lo stesso con θ.
con i $b_1 \dots b_{n+1}$

☆☆

$\lambda_i = 0 \Leftarrow ☆ \quad \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1} = 0_V \quad \overset{B \cap U = (0)}{\Longleftarrow}$

$B \ni \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 a_1 + \dots$
$U \ni = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} + \cancel{\lambda_1 a_1 + \dots \lambda_{n+1} a_{n+1}}$

Domando 36

- primo modo per ottenere $M \in \mathcal{A}$ scelgo solo 15 numeri
- secondo modo $\mathcal{A} = \operatorname{Ker} F$ teo dim

$\dim \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} F = \dim M$

$\dim \operatorname{Im} F = 1$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n,n,\mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n,\mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n,\mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ *per cui* $v = a + b$:

è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$.*

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

PER CASA

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

$\begin{pmatrix} \alpha & & \tilde{Q} & \\ & \beta & \gamma & \\ Q & & & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

$= \begin{pmatrix} x & & 0 & \\ & x & & \\ Q & & a_1 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \tilde{Q} & \\ 0 & & y & y \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

D3c, primo modo, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (diagonale di una matrice arbitraria)
$\alpha = x + b_1$ $\gamma = a_1 + y$ e.g. $b_1 = \alpha - x$, x arbitrario
$\beta = x + b_2$ $\delta = a_2 + y$
- secondo modo $\dim \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = 14$
$\dim \mathcal{A} + \mathcal{B} = \dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{B} - 14 = 16$

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2). e Es. 3

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1,2,3,4,5)$.

- Polinomi e spazi cartesiani

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2,1,1)$ in tale base.

- Teorema di Ruffini

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

- Teorema di divisione tra polinomi
- Polinomio nullo e funzione polinomiale nulla

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \ldots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

Domando 3

$\mathcal{M}(4) =: \mathcal{M}$

$\mathcal{A} = \{ M \in \mathcal{M} : M^1_1 = M^2_2 \}$

$\mathcal{B} = \{ M \in \mathcal{M} : M^3_3 = M^4_4 \}$

a) sono sottospazi con la def. di spazio vett. di matrici

oppure

$\mathcal{A} = \operatorname{Ker} F$

$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$F(N) = N^1_1 - N^2_2$

è lineare

(somme di applic. lineari con stesso codominio è lineare e le proi. sono lineari)

$\mathcal{B} = \operatorname{Ker} G$

$G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}$

$G(N) = N^3_3 - N^4_4$

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a

$$V_1 \left\{ \begin{array}{rrrrrl} 3x & +y & -z & -2u & -v & =0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & =0 \end{array} \right. \quad \text{e di quello a} \quad \underset{V_2}{\left\{ \begin{array}{rrrrrl} x & +y & +z & +u & +v & =0 \\ x & -y & +z & -u & +v & =0 \end{array} \right.} \quad \text{(cfr. Esercizio 2).} \text{ e Es.3}$$

• Primo modo cenno

$$V_1^{\perp} = \left\{ \lambda \overset{c_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}} + \mu \overset{c_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2^{\perp} = \left\{ \eta \overset{c_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \xi \overset{c_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} : \eta, \xi \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{span}(V_1^{\perp} \cup V_2^{\perp}) = V_1^{\perp} + V_2^{\perp} = \{ \lambda c_1 + \mu c_2 + \eta c_3 + \xi c_4 : \lambda \mu \eta \xi \in \mathbb{R}$$

eliminazione dei parametri, ...

In generale $\operatorname{span}(A \cup B) = \operatorname{span}(\operatorname{span} A \cup \operatorname{span} B) =$
$= \operatorname{span} A + \operatorname{span} B$

• secondo modo: si fa prima l'esercizio 3

Domanda 4

A e B sottospazi

$A \cup B$ è un sottospazi se e solo se

$A \subseteq B$ o $B \subseteq A$

per caso

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi non tutti nulli $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \dots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N}, \ a \in \mathbf{C}\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Notazione: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme, $v \in V$ e $k \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{A} + v = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = \alpha + v\}, \quad r\mathcal{A} = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = r\alpha\}.$$

Esercizio 1. (cfr. Domanda 1 del secondo foglio di esercizi)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ suoi sottospazi vettoriali. Si mostri

$$v \notin \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff (\mathcal{A} + v) \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W : W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

   $$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v\rangle = \langle v \cdot u\rangle$, $\langle u + rw \cdot v\rangle = \langle u \cdot v\rangle + r\langle w \cdot v\rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A}\ \langle v \cdot \alpha\rangle = 0\}.$$

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.

3.a

$v \in A^\perp$ IPOTESI
$\langle v \cdot a\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall a \in A$ (1)
$\langle u \cdot a\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall a \in A$ (2)
$u \in A^\perp$
allora $\lambda u + v \in A^\perp$
$\langle (\lambda u + v) \cdot a\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall a \in A$
bilinearità (of prod. scal)
$= \lambda\langle u \cdot a\rangle + \langle v \cdot a\rangle =$
IPOTESI $0^{(1)} + 0^{(2)} = 0$

3.b-1 $\Rightarrow$ $\beta \in B^\perp$ $\forall b \in B$ $\langle \beta \cdot b\rangle = 0_{\mathbb{R}}$
ma $A \subseteq B$ $\forall a \in A$ $\langle \beta \cdot a\rangle = 0_{\mathbb{R}}$
cioè $\beta \in A^\perp$

usiamo $\Rightarrow$ per $B^\perp \subseteq A^\perp$
$B^{\perp\perp} \supseteq A^{\perp\perp}$
$B \supseteq A$

1 $\Leftarrow$ aspettiamo: mostriamo prima
2 ? $A = A^{\perp\perp}$ 2.1 $A \subseteq A^{\perp\perp}$ * e ?? $A^{\perp\perp} \subseteq A$
2.1 $a \in A \Rightarrow a \in A^{\perp\perp}$ cioè $a \in A \Rightarrow \forall \alpha \in A^\perp$ $\langle a \cdot \alpha\rangle = 0$ ovvio
$\forall x \in A$ $\alpha \cdot x = 0$
2.2 $\dim A^\perp = n - \dim A$ $(a_1, \dots, a_h)$ base di A le equazioni indip. di $A^\perp$ $x = (x_1 \dots x_n)$ $\begin{cases} x \cdot a_1 = 0 \\ \vdots \\ x \cdot a_h = 0 \end{cases}$
$\dim A^{\perp\perp} = n - \dim A^\perp = n - (n - \dim A) = \dim A$
Quindi per * $A \subseteq A^{\perp\perp}$ e hanno la stesso dim $\Rightarrow A = A^{\perp\perp}$

3.6-3 $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\perp} = \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp}$

$\supseteq$) è ovvio $\quad \underbrace{z \in \mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp}}_{\text{usare la definizione}}$ allora $\forall x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ $\quad \underline{\langle z \cdot x \rangle = 0}$

$z = \alpha + \beta \qquad \forall a \in \mathcal{A} \;\; \alpha \cdot a = 0 \;\; (*)$

$\qquad\qquad\qquad \forall b \in \mathcal{B} \;\; \beta \cdot b = 0 \;\; (**)$

$\langle \alpha + \beta \cdot x \rangle = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

$\qquad \parallel$

$\langle \alpha \cdot x \rangle + \langle \beta \cdot x \rangle$

$(*) \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad (**)$

$\subseteq$) $\dim(\mathcal{A}^{\perp} + \mathcal{B}^{\perp}) = \dim \mathcal{A}^{\perp} + \dim \mathcal{B}^{\perp} - \dim(\mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})$

$= n - \dim \mathcal{A} + n - \dim \mathcal{B} - \dim(\mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})$

$= 2n - \dim(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - \dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - \dim(\mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})$

$= \dim(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} + \dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\perp} - (\dim \mathcal{A}^{\perp} \cap \mathcal{B}^{\perp})$

CONTINUA LA PROSSIMA ESERCITAZIONE