Esercitazione 8, 16 novembre

Terzo foglio di esercizi

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:
è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$*.

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Per casa

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2).

ad Es. 3

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

- Polinomi e spazi cartesiani
- Teorema di Ruffini
- Teorema di divisione tra polinomi
- Polinomio nullo e funzione polinomiale nulla

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base 1, z, z^2, z^3 dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1$, $z^2 + 1$, $z^3 - z^2$, $z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \ldots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \ldots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi non tutti nulli $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \ldots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\left\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N}, \ a \in \mathbf{C}\right\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v\rangle = \langle v \cdot u\rangle$, $\langle u + rw \cdot v\rangle = \langle u \cdot v\rangle + r\langle w \cdot v\rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A}\ \langle v \cdot \alpha\rangle = 0\}.$$

Relazioni di polarizzazione

10/11

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

$\dim A^\perp = n - \dim A$ *

10/11 1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;

10/11 2. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$;

3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.

3b.3 • $(A \cap B)^\perp \supseteq A^\perp + B^\perp$ 10/11

•• $(A+B)^\perp \supseteq A^\perp \cap B^\perp$ $\gamma \in A^\perp \cap B^\perp \iff \forall a \in A\ b \in B\ \langle \gamma \cdot a\rangle = \langle \gamma \cdot b\rangle = 0$

$\implies \forall a \in A,\ b \in B\ \langle \gamma \cdot (a+b)\rangle =$ [bilinearità] $\langle \gamma \cdot a\rangle + \langle \gamma \cdot b\rangle = 0 + 0 = 0$

••• Dalle precedenti inclusioni $\dim(A \cap B)^\perp \geq \dim(A^\perp + B^\perp)$, $\dim(A+B)^\perp \geq \dim A^\perp \cap B^\perp$;

d'altronde $\overbrace{\dim(A^\perp + B^\perp)}^{a} + \overbrace{\dim(A^\perp \cap B^\perp)}^{b} = \dim A^\perp + \dim B^\perp \overset{*}{=}$

$= 2n - \dim A - \dim B = 2n - \dim(A+B) - \dim(A \cap B) \overset{*}{=}$

$= \underbrace{\dim(A+B)^\perp}_{\beta} + \underbrace{\dim(A \cap B)^\perp}_{\alpha}$

$a + b = \alpha + \beta$, $\alpha \geq a$, $\beta \geq b$ $\iff$ $a - \alpha = \beta - b$, $\alpha - a \geq 0$, $\beta - b \geq 0$ $\iff$ $a - \alpha = 0$, $\beta - b = 0$ $\iff$ $a = \alpha$, $\beta = b$

$A \subseteq B$ sottospazi $\dim A = \dim B \implies A = B$

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a

$$V_1\ \begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \end{cases} \quad \text{e di quello a} \quad V_2\ \begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases}$$

(cfr. Esercizio 2). Es. 3

Primo metodo

$V_1^\perp = \text{span}\{(3,1,-1,-2,-1),(1,-2,1,-1,1)\} =$
$= \{\mu(3,1,-1,-2,-1) + \lambda(1,-2,1,-1,1)\}$

$V_2^\perp = \{s(1,1,1,1,1) + t(1,-1,1,-1,1)\}$

$\text{span}(V_1^\perp \cup V_2^\perp) =$
$= V_1^\perp + V_2^\perp =$
$= \text{span}(c_1, c_2, c_3, c_4) =$
$= \{\mu c_1 + \lambda c_2 + s c_3 + t c_4\}$
$\to$ eliminazione parametri

$x = 3\mu + \lambda + s + t$
$y = \mu - 2\lambda + s - 2t$
$z = -\mu + \lambda + s + t$
$u = \ldots$
$v = \ldots$

Secondo metodo usando le relazioni di polarizzazione provate nell'esercizio 3

Poniamo per brevità
$c_1 = (3,1,-1,-2,-1)$
$c_2 = (1,-2,1,-1,1)$
$c_3 = (1,1,1,1,1)$
$c_4 = (1,-1,1,-1,1)$

$\langle v \rangle = \text{span}\, v$

$V_1 = (c_1)^\perp \cap (c_2)^\perp = (\langle c_1 \rangle + \langle c_2 \rangle)^\perp$ (Es 3.3.b)

$V_2 = (c_3)^\perp \cap (c_4)^\perp = (\langle c_3 \rangle + \langle c_4 \rangle)^\perp$

Es 3.2 $B^{\perp\perp} = B$

$V_1^\perp + V_2^\perp = \langle c_1 \rangle + \langle c_2 \rangle + \langle c_3 \rangle + \langle c_4 \rangle = \text{span}(c_1, c_2, c_3, c_4) = (V_1 \cap V_2)^\perp$

$V_1 \cap V_2 =$ soluzioni
$$\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \end{cases} V_1 \qquad \begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases} V_2$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{I}-\text{II} & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \text{II}-\text{III} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\text{I}-\text{IV} & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \end{array} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ \text{II}-\text{III} & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ \text{II}-2\text{IV} & 0 & 0 & 4 & 5 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccccc} & x & y & z & u & v \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ \text{III}-\text{IV} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \to u = 0$$

$$\begin{matrix} x & y & z & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} x &= -y - z - v = 0 \\ y &= -2z - 2v = 0 \\ z &= -v \end{aligned} \qquad (0, 0, -1, 0, 1)t$$

QUINDI $(V_1 \cap V_2)^\perp$ ha equazione $z - v = 0$

Polinomi

- a coeff. in un anello A (con identit.)

$+_A$ commutativo, associativo, 0_A, $-A$
$\cdot_A$ associativo, distrib. risp. a $+_A$, 1_A

si assume $0_A \neq 1_A$

es. le matrici $n \times n$ $\mathcal{M}$

$$A \cdot B = (AB^1 | \dots | AB^n) = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} 1_n = (0)$$

$\operatorname{Ker} A \neq (0) \Rightarrow \forall B \ \operatorname{Ker} AB \neq (0)$
$\forall C \ \operatorname{Ker} CA \neq (0)$

f lineare $\Rightarrow [f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = (0_A)]$
$f : A \to B$

$f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(u) - f(v) = 0_B \Leftrightarrow$
$f(u-v) = 0_B \Leftrightarrow u - v \in \operatorname{Ker} f$

- se c'è il reciproco per gli elementi non nulli ($A = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$, $A = \{0, 1\}$)
A si chiama corpo, se $\cdot_A$ è comm. campo

- $P = a_0 1 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ $\quad a_i \in \mathcal{M}(n \times n)$ $\quad t \to n \times n$

$f_P : \mathcal{M}(n \times n) \to \mathcal{M}(n \times n)$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}(n \times n)$ $\quad t \to \mathbb{R}$

$P = a_0 t^0 + a_1 t + \dots + a_K t^K \qquad a_i \in \mathbb{R}$

$t \to \mathbb{R} \qquad f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \to M(n \times n) \qquad f_p : M(n\times n) \to M(n \times n)$

$a_0 1_n$

DUE POLINOMI SONO UGUALI SSE HANNO GLI STESSI COEFFIC.

- $a_0 t^0 + a_1 t^1 + \dots + a_K t^K \longleftrightarrow (a_0\, a_1 \dots a_K\, 0_A\, 0_A \dots)$

posso identificare i polinomi a coeff. in A, scritti in forma canonica con le potenze crescenti della variabile da sx a dx, con le successioni definitivamente nulle a valori in A $\quad \bigcup A^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- Altrimenti i polinomi in A (se A è un campo) sono lo spazio vettoriale generato da $\{t^0, t^1, t^2, \dots, t^K, \dots\}$ monomi monici

L'insieme dei polinomi a coeff. in A

lo si indica con $A[t]$, $A[z]$, $A[x]$ . . .

- $p, q \in A[t]$ li posso sommare

$$p+q =: (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \dots (a_k+b_k)t^k$$

$$p = a_0 + a_1 t - - a_k t^k \qquad k \geq h$$

$$q = b_0 + b_1 t - - - + b_h t^h = b_0 + b_1 t + \dots b_k t^k$$

Polinomio nullo quello con coeff. nulli

$b_\ell = 0$ se $\ell > h$

ANELLO

- $a \in A$ $\quad aP = a a_0 + a a_1 t + \dots + a a_k t^k$

se A è un campo $A[t]$ è uno spazio vettoriale

per definizione di somma e prodotto $\{t^0, t, \dots t^k, \dots\}$ sono linearmente indipendenti

- $p \cdot q = (a_0 + \dots + a_k t^k)(b_0 + \dots + b_k t^k)$

$(a_0 \dots a_k\, 0 \dots 0)$ $a_k \neq 0$ per ottenere

$(b_0 \dots b_k\, 0 \dots 0)$

$(b_h \neq 0, b_\ell = 0$ se $\ell > h)$

$$= c_0 + \dots + c_\ell t^\ell + \dots + c_N t^N$$

$$c_\ell = \sum_{h=0}^{\ell} a_h b_{\ell-h}$$

$h+k$

$a_k b_h$

$$1_{A[t]} = 1_A \cdot t^0$$

Grado

$$\deg : A[t] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

$$\deg 0_{A[t]} = -\infty$$

$$\deg P = \min(k : a_k \neq 0 \text{ e } \forall j > k \; a_j = 0)$$

$P \neq 0_{A[t]}$ significa

$P = a_0 + \dots + a_k t^k$

e qualche $a_j \neq 0_A$.

$\deg P \cdot Q \leq \deg P + \deg Q$ se A campo vi è $=$.

$\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

NOTA

i polinomi di grado 1 sono i monomi $at+b$, $a \neq 0_A$

i polinomi di grado 0 sono i monomi $a \, (a \cdot t^0)$ $a \neq 0_A$

Teorema di divisione tra polinomi

A campo, $p \in A[t]$, $d \in A[t]$

$$\deg p \geq \deg d$$

allora

$$\exists\, q \in A[t] \quad \exists\, r \in A[t]$$

1. $\deg r \lneq \deg d$
2. $p = d \cdot q + r$

e sono gli unici con tali propr.

Corollario Ruffini

$p \in A[t]$ $\quad$ "$p(a)$" $= 0_A \iff \exists\, q \in A[t] \quad p = (t-a)\cdot q$

$\quad t \to a \quad g_p(a) = 0_A$

$\Leftarrow$) ovvio $\quad \Rightarrow$) $p = (t-a)\cdot q + r$ $\quad$ con $\deg r < \deg(t-a) = 1$

pagina successiva %

quindi r è del tipo αt^0 $\alpha \neq 0_A$ o r è il polinomio nullo.

Se fosse $r = \alpha t^0$ si avrebbe

$$p = (t - a) q + \alpha t^0$$

calcolando la funzione associata nel punto a prefissato

$$0_A = \underbrace{(a -_A a)}_{0_A} \cdot q(a) +_A \alpha$$

quindi

$$0_A = \alpha.$$

Pertanto r è il polinomio nullo.

Teorema

Se A è un campo, e $p, q \in A[t]$

allora

$$p \cdot q \underset{\substack{\text{come} \\ \text{polinomi}}}{=} 0_{A[t]} \iff p = 0_{A[t]} \text{ o } q = 0_{A[t]}$$

DIM • premessa: si assume $0_A \neq 1_A$, poiché ogni $a \in A$ $a \neq 0_A$

$$ab = 0_A \Rightarrow a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} 0_A = 0_A$$

(andrebbe mostrato che $x \cdot 0 = 0 \ldots$)

quindi per associatività $b = 0_A$.

•• Se due polinomi fossero non nulli

$p = a_0 + \ldots + a_k t^k \quad a_k \neq 0_A,$

$q = b_0 + \cdots + b_h t^h \quad b_h \neq 0_A$ per definizione di prodotto

$$pq = a_0 b_0 + \cdots + a_k b_h \cdot t^{k+h}$$

per il primo punto $a_k b_h \neq 0$ quindi

pq sarebbe non nullo.

Viceversa se uno dei due polinomi fosse nullo

$0_{A[t]} \cdot q = 0_{A[t]}$ per definizione $\blacksquare$

NOTA

se A è un campo infinito

$$g_p = 0_{A \to A} \iff P \equiv 0_{A[t]}$$

$(g_p(\alpha) = 0_A \ \forall \alpha \in A)$

$\Leftarrow]$ ovvio

$\Rightarrow]$ $\forall \alpha \in A$ $g_p(\alpha) = 0_A$ quindi per ogni $\alpha \in A$

vi è $q \in A[t]$ $\quad P = (t - \alpha) q$

se $P \neq 0_{A[t]}$ $\quad \deg P = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

poiché A è infinito trovo $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ elementi diversi di A,

Per ipotesi "P"$(\alpha_1) = \dots =$ "P"$(\alpha_{k+1}) = 0_A$, usando

Ruffini (per induzione su $k \geq 1$) poiché $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$

$P = (t - \alpha_1) q_1 \qquad 0_A =$ "P"$(\alpha_j) = \underbrace{(\alpha_j - \alpha_1)}_{\neq 0_A}$"$q_1$"$(\alpha_j)$ per $j \neq 1$ quindi

per $j \neq 1$ "q_1"$(\alpha_j) = 0_A$ e per ipotesi induttiva

$\underbrace{P}_{\text{ha grado } k} = \underbrace{(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_{k+1}) \cdot q_{k+1}}_{\text{ha grado} \geq k+1}$: assurdo. $\blacksquare$

ESEMPIO

$A = (\{0,1\},\ 0+0=0,\ 1+1=0,\ 0\cdot 1=0,\ 00=0,$
$0+1=1+0=1)$

campo con due elementi

$x^3 + x$ calcola la funzione nulla

ma non è il poli nullo

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

3/11 **Domanda 2** a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "V è somma diretta di A e di B"*: $V = A \oplus S$.

10/11 **Domanda 3** a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Per casa **Domanda 4** Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

INIZIO 10/11
FINE 16/11 **Domanda 5** Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2). Es. 3

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \\ x + 2y + 2z + u + v = 0 \end{cases}$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

16/11 **Domanda 7** a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

16/11 **Domanda 8** a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base 1, z, z^2, z^3 dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3? $\mathbb{C}[z]_3 \sim \mathbb{R}^4$ $(-2,1,0,0) \sim z-2$
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1$, $z^2 + 1$, $z^3 - z^2$, $z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- 16/11 Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \ldots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

- Polinomi e spazi cartesiani
- Teorema di Ruffini
- Teorema di divisione tra polinomi
- Polinomio nullo e funzione polinomiale nulla

D7

$f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$ sono una base.

1) modo

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ ha 3 pivot

2) modo

$e_1 = f_1$

$e_2 = f_2 - f_1$

$e_3 = f_3 - f_2$

$e_1, e_2, e_3 \in \mathrm{Span}(f_1, f_2, f_3)$

$\Downarrow$

$\mathrm{span}\, f_1 f_2 f_3 = \mathbb{R}^3$ $(1\ 0\ 1)$

b $2e_1 + e_2 + e_3 = 2f_1 + f_2 - f_1 + f_3 - f_2$

$\longrightarrow 0_{A[t]} \notin \{p \in A[t] : \deg p = n\}$

$n=2$ t^2, t^2+1 la differenza è $1 \cdot t^0$ ha grado 0 c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z-1$, z^2+1, z^3-z^2, z^3-z? Sono una base di $\mathbb{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z-2$.

$P_1 \quad z-1 \qquad (-1,1,0,0)$

$P_2 \quad z^2+1 \qquad (1,0,1,0)$

$P_3 \quad z^3-z^2 \qquad (0\ 0\ -1\ 1)$

$P_4 \quad z^3-z \qquad (0,-1,0,1)$

$\mathbb{C}[z]_3 \qquad \mathbb{R}^4$

1° modo

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

2° modo

$P_4 - P_3 = z^2 - z$

$z^2 - z + P_1 = z^2 - 1$

$z^2 - 1 - P_2 = -2$

$1 = \dfrac{P_4 - P_3 + P_1 - P_2}{-2}$

$z = P_1 + \dfrac{P_4 - P_3 + P_1 - P_2}{-2}$

$z^2 = P_2 - \dfrac{P_4 - P_3 + P_1 - P_2}{-2}$

$z^3 = P_4 + z = P_4 + P_1 - \dfrac{P_4 - P_3 + P_1 - P_2}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} z-2 &= z + P_4 - P_3 + P_1 - P_2 \\ &= P_1 + \frac{P_4 - P_3 + P_1 - P_2}{2} = \\ &= \frac{3}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 - \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_4 \\ &\left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}}$$

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.

b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

a) $a_1 \dots a_n \quad a_i \neq a_j \quad i \neq j \cdot V_{a_1 \dots a_n} = \{P \in \mathbb{C}[z] : P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0_{\mathbb{C}}\}$

$$P \in V_{a_1 \dots a_n} \underset{\text{Ruffini}}{\Longleftrightarrow} P(z) = (z-a_1)Q_1(z)$$

$$= (z-a_1)(z-a_2)Q_2(z) \Rightarrow Q_1(a_2) = 0 \quad \boxed{a_2 - a_1 \neq 0}$$

$$\vdots$$

$$= (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)\cdot Q_n(z)$$

Per induzione su n

$n=1$ è Ruffini $P \in V_a \Leftrightarrow P = (z-a)Q$

$P \in V_{a_1 \dots a_{n+1}}$ $\quad P \in V_{a_{n+1}}$ $\quad P = (z-a_{n+1})\cdot Q$

$0_{\mathbb{C}} = P(a_j) = (a_j - a_{n+1})Q(a_j) \quad \forall j \neq n+1$

$Q \in V_{a_1 \dots a_n} \quad Q = (z-a_1)\cdots(z-a_n)\cdot\tilde{Q}$

$$\lambda P + \mu Q = \lambda(z-a_1)\cdots(z-a_n)\tilde{Q}(z) + \mu(z-a_1)\cdots(z-a_n)\tilde{\tilde{Q}}(z)$$

$P, Q \in V_{a_1 \dots a_n}$

$$= (z-a_1)\cdots(z-a_n)\left(\lambda\tilde{Q}(z) + \mu\tilde{\tilde{Q}}(z)\right) \qquad \lambda P + \mu Q \in V_{a_1 \dots a_n}$$

Per dimostrare che ho dim ∞ dobbiamo trovare una famiglia infinita di polinomi in $V_{a_1 \dots a_n}$ lin. indip: $(z-a_1)\cdots(z-a_n)\cdot(z-a_{n+1})^k$ $\quad a_{n+1} \neq a_j)$

Se fossero dipendenti vi sarebbero $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{C}$ per cui

$$0_{\mathbb{C}[z]} = \sum_{h=1}^{N} \lambda_h (z-a_1) \cdots (z-a_n) \cdot (z-a_{n+1})^h =$$

$$= \underbrace{(z-a_1) \cdots (z-a_n)}_{\neq 0_{\mathbb{C}[z]}} \cdot \sum_{h=1}^{N} \gamma_h (z-a_{n+1})^h$$

per il teorema di annullamento del prodotto di polinomi con coefficienti in un campo deve essere quindi

$$0_{\mathbb{C}[z]} = \sum_{h=1}^{N} \gamma_h (z-a_{n+1})^h \qquad (*)$$

NOTA se $a_1, \dots, a_n$ fossero non nulli, si potrebbe scegliere $a_{n+1} = 0_{\mathbb{C}}$ e si avrebbe la tesi poiché le potenze della variabile sono lin. indip. per definizione e $(*)$ sarebbe $0_{\mathbb{C}[z]} = \sum_{h=1}^{n} \gamma_h z^h$

Altrimenti si può procedere per induzione su $N \geq 1$

- $N = 1$ $\quad 0_{\mathbb{C}[z]} = \gamma_1 (z - a_{n+1}) \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_1 a_{n+1} = 0_{\mathbb{C}}$.
- PASSO INDUTTIVO $\quad 0_{\mathbb{C}[z]} = \sum_{h=1}^{N+1} \gamma_h (z-a_{n+1})^h = (z-a_{n+1}) \cdot \sum_{h=1}^{N+1} \gamma_h (z-a_{n+1})^{h-1} =$

$$= \underbrace{(z-a_{n+1})}_{\neq 0_{\mathbb{C}[z]}} \cdot \left(\gamma_1 + \gamma_2 (z-a_{n+1})^2 + \dots + \gamma_{N+1} (z-a_{n+1})^N \right) =$$ % pagina seguente

Quindi per il teorema di annullamento

$$0_{\mathbb{C}[z]} = \gamma_1 + \gamma_2(z - a_{n+1}) + \ldots + \gamma_{N+1}(z - a_{n+1})^N \quad ** $$

$\downarrow$ calcolando per $z = a_{n+1}$

$$0_{\mathbb{C}} = \gamma_1$$

quindi $**$ diventa

$$0_{\mathbb{C}[z]} = \gamma_2(z - a_{n+1}) + \ldots + \gamma_{N+1}(z - a_{n+1})^N$$

del tipo $\lambda_1(z - a_{n+1}) + \ldots + \lambda_N(z - a_{n+1})^N$

per ipotesi induttiva quindi

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{N+1} = 0_{\mathbb{C}}$$

$\blacksquare$