FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA PARZIALE del 17 febbraio 2006

COGNOME ____________________________ NOME ___________________________

NOTE:
- **questo foglio deve essere restituito**
- **e' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche**

Esercizio 1

Una molla di costante elastica K=40 N/m e lunghezza a riposo L_0=1m è appesa al soffitto di una stanza di altezza H=3m. All'altra estremità della molla è attaccata una pallina di massa M=1kg. La pallina è vincolata da delle guide a muoversi solo in verticale. (Nota: per le valutazioni numeriche si può assumere g=10m/s^2)

1.1 Si calcoli a quale distanza dal soffitto si trova la posizione di equilibrio del sistema.
1.2 Se la molla viene allungata di qualche centimetro e poi rilasciata, con quale periodo oscillerà la pallina M ?
1.3 Se la molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata, con quale velocità la pallina colpirà il soffitto ?
1.4 Si osserva che dopo aver rimbalzato sul soffitto la pallina non arriva di nuovo a toccare il pavimento ma si arresta ad un'altezza h=1m da terra. Si calcoli quanta energia si è persa nell'urto con il soffitto.

Esercizio 2

Un blocchetto di massa m=100g è vincolato a muoversi in una scanalatura liscia radiale di un disco uniforme di massa M=1kg e di raggio R=10cm. Il blocchetto è collegato ad una corda che corre nella scanalatura e passa per un foro al centro del disco. Alla corda può essere applicata una tensione esterna. Inizialmente il sistema disco+blocchetto è in rotazione senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il centro del disco e perpendicolare al disco stesso con velocità angolare ω=10rad/s. Il blocchetto si trova sul bordo del disco.

2.1 Si calcoli la tensione della corda necessaria a mantenere il blocchetto in equilibrio al bordo del disco.
2.2 Alla corda viene applicata una tensione superiore a quella di equilibrio ed il blocchetto si avvicina al centro del disco. Dire se le seguenti quantità relative al sistema blocchetto+disco si conservano nel movimento, e perchè: quantità di moto, energia, momento angolare rispetto all'asse di rotazione.
2.3 Dopo un certo tempo il blocchetto si trova nella posizione $R_1 = ½ R$. Qual è la velocità angolare del sistema a questo momento ?
2.4 Si calcoli il lavoro fatto dalla tensione della corda nello spostamento del blocchetto dalla posizione iniziale alla posizione R_1.

SOLUZIONI

1.1 $K(x - L_0) = M g \rightarrow x = L_0 + M g/K$ = 1.25 m

1.2 $\omega = \sqrt{(K/M)}$; $T = 2\pi\sqrt{(M/K)}$ = 0.99 s

1.3 Si conserva l'energia meccanica perchè le forze in gioco (gravitazionale ed elastica) sono conservative. Scelgo come 0 dell'energia potenziale gravitazionale il pavimento. $E_i = ½ K (H - L_0)^2$; $E_f = ½ K (L_0)^2 + M g H + ½ M v^2$; imponendo $E_i = E_f$ si ottiene $v^2 = (K/M) H (H - 2 L_0) - 2 g H = 60\ m^2/s^2 \rightarrow v = 7.75\ m/s$

1.4 Non si conserva l'energia nell'urto con il soffitto. E_i è quella del punto 1.3; E_i = 80 J; $E_f = ½ K (H - h - L_0)^2 + M g h$ = 30 J ; $E_f - E_i$ = – 50J.

2.1 La tensione deve essere pari alla forza centripeta. $T = M \omega^2 R$ = 1N

2.2 Vi sono forze esterne (T e la forza di reazione vincolare dell'asse di rotazione), quindi **non** si conserva la quantità di moto; il lavoro delle forze esterne non è nullo, perchè il punto di applicazione di T si sposta, quindi **non** si conserva l'energia; il momento delle forze rispetto al centro del disco è nullo, quindi si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione.

2.3 Il momento di inerzia del disco è $I = ½ M R^2$. Il momento angolare iniziale e finale è: $L_i = I\omega_i + m\, \omega_i R^2$; $L_f = I\omega_f + m\, \omega_f (½ R)^2$. Dalla conservazione del momento angolare $L_i = L_f$ si ottiene $\omega_f/\omega_i = (½ M + m) (½ M + ¼ m) = 1.14$, da cui ω_f = 11.4 rad/s.

2.4 Il lavoro fatto dalle forze esterne è pari alla variazione di energia meccanica del sistema. $E_i = ½ I \omega_i^2 + ½ m (R \omega_i)^2$ = 0.300 J; $E_f = ½ I \omega_f^2 + ½ m (½ R \omega_f)^2$ = 0.341 J $W = E_f - E_i$ = 41 mJ.

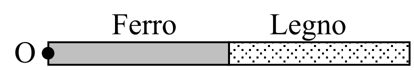
FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA PARZIALE del 20 aprile 2006

COGNOME ____________________________ **NOME** ___________________________

NOTE:
- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**

Costanti fisiche:
$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}; |e| = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}; \mathrm{m_e} = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}; \mathrm{G} = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

Esercizio 1



Due barrette di sezione A e lunghezza d=50cm sono realizzate con due diversi materiali: ferro, densità ρ_1=7860 kg/m^3 e legno, densità ρ_2=800 kg/m^3.Le due barrette sono rigidamente unite insieme in modo da formare una singola barretta di lunghezza 2d e massa M=10kg. La barretta risultante è incernierata all'estremo della parte in ferro e può ruotare nel piano verticale

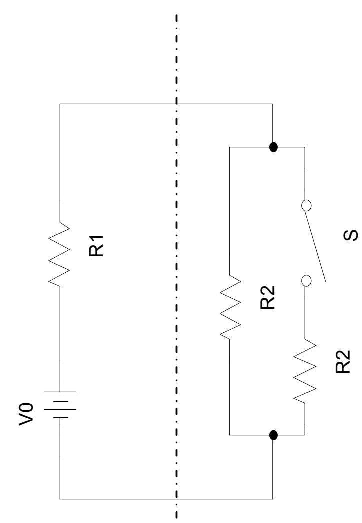
1.1 Calcolare la sezione A delle barrette.
1.2 Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione.
1.3 La barretta viene rilasciata da ferma dalla posizione orizzontale. Calcolare l'accelerazione dell'estremo della parte di legno.

Esercizio 2

Si considerino due palline di massa M e cariche con una carica Q poste a distanza R.
2.1 Calcolare il rapporto Q/M per cui la forza tra le palline è nulla e dire se dipende da R.
2.2 Si considerino le due palline fissate nelle posizioni (d, 0,0) e (-d, 0,0). Si calcoli il potenziale elettrico lungo l'asse y, assumendo lo zero del potenziale all'infinito e se ne disegni il grafico qualitativamente.
2.3 Un elettrone è vincolato a muoversi lungo l'asse y. Quale velocità deve avere l'elettrone in y=0 per sfuggire all'attrazione delle due palline se Q=1pC e d=1μm? Si può trascurare il campo gravitazionale ?

Esercizio 3

Si consideri il circuito in figura, con V0=1V e R1=1Ω.
3.1 Calcolare quanto deve essere la resistenza R2 se la potenza dissipata nella parte destra del circuito è indipendente dalla posizione dell'interruttore S.
3.2 Si calcoli la potenza fornita dalla pila nelle due posizioni dell'interruttore S.



SOLUZIONI

1.1 $A = \frac{M}{d} \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} = 23.1\text{cm}^2$

1.2 Si deve utilizzare il teorema degli assi paralleli per calcolare i momenti di inerzia delle due barrette rispetto ad 0. $I = \frac{1}{3} M d^2 \frac{\rho_1 + 7\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 1.29\text{kg m}^2$

1.3 $a = g \frac{3(\rho_1 + 3\rho_2)}{\rho_1 + 7\rho_2} = 2.29g = 22.4\text{m/s}^2$

2.1 $\frac{Q}{M} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \cdot G} = 8.6 \times 10^{-11}\,\text{C/kg}$

2.2 $V(y) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2 + y^2}}$

2.3 L'energia potenziale dell'elettrone a y=0 vale $U(0) = -\frac{2eQ}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[1 + \frac{Q/M}{e/m_e}\right]$. Il secondo termine in parentesi, che corrisponde al potenziale gravitazionale, vale circa 10^{-22} e può sicuramente essere trascurato. $v_e = \sqrt{\frac{4(e/m_e)Q}{4\pi\varepsilon_0 d}} = 7.95 \times 10^7\,\text{m/s}$

3.1 $R2 = \sqrt{2} R1 = 1.41\Omega$

3.2 La potenza nei due casi vale $\begin{cases} \text{P(aperto)} = \frac{V_0^{\,2}}{R1(1+\sqrt{2})} = 414\text{mW} \\ \text{P(chiuso)} = \frac{V_0^{\,2}}{R1(1+\sqrt{2}/2)} = 586\text{mW} \end{cases}$

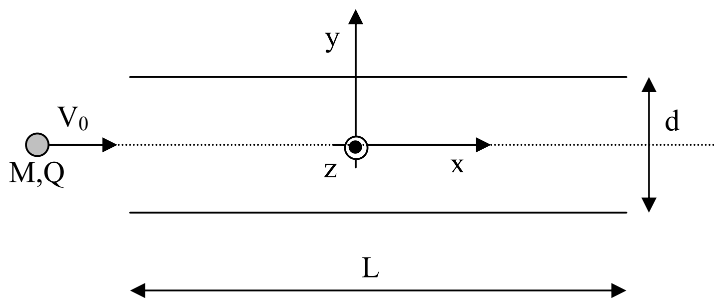
FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/6
PROVA SCRITTA PARZIALE del 25 maggio 2006

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

NOTE:

- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**

Esercizio 1 Un protone ($M=1.67*10^{-27}$ kg, $Q=1.6*10^{-19}$ C) viaggia inizialmente a velocita' $V_o= 10^5$ m/s lungo l'asse x. Attraversa un condensatore a facce piane e parallele. Le facce sono quadrate, di lato L=1cm, e distano d=1mm. Alle due facce del condensatore e' applicata una differenza di potenziale V ignota. Si trascuri la forza di gravita'.

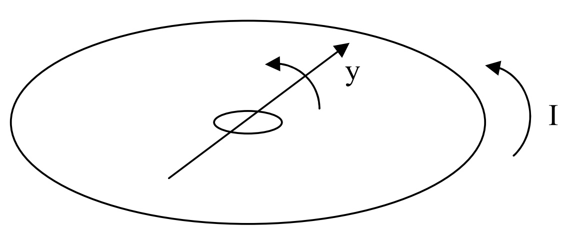


1.1 Si osserva che all'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha=0.096$ rad con l'asse x (verso il basso, cioe' verso $y<0$). Si calcoli la d.d.p. V e se ne indichi il segno.

1.2 Si determini modulo e verso del campo magnetico che sarebbe necessario applicare lungo z dentro al condensatore per annullare la deflessione.

1.3 Si supponga di mantenere il campo magnetico trovato nel punto 1.2, ma di azzerare la differenze di potenziale tra le facce del condensatore. Con quale angolo di deflessione β il protone uscira' dal condensatore? Confrontare β con α.

Esercizio 2 Una spira piana circolare di raggio a=1mm e resistenza $R=1\Omega$ e' posta al centro di una spira piana circolare di raggio b=5cm. La spira piccola puo' ruotare attorno a un suo diametro (asse y). Si trascuri la variazione del campo magnetico B nella zona di spazio occupata dalla spira piccola.



2.1 Scrivere l'espressione del coefficiente M di mutua induzione in funzione dell'angolo θ tra i piani delle spire. Si indichi per quale valore di θ il coefficiente M e' massimo e se ne calcoli il valore.

2.2 La spira piccola viene posta in rotazione attorno al suo diametro da un operatore. La spira ruota con frequenza f=50Hz, e nella spira grande viene fatta circolare una corrente continua I=100A.

Scrivere l'espressione in funzione del tempo della corrente indotta nella spira piccola assumendo che le spire siano nello stesso piano all'istante t=0. Dire in quali istanti la corrente e' massima e se ne calcoli il valore.

2.3 Scrivere l'espressione del momento della forza applicata dall'operatore in funzione del tempo, necessario per mantenere costante la velocita' angolare della spira piccola. Dire in quali istanti il momento e' massimo e calcolarne il valore.

Esercizio 3 Due resistori R_1 e R_2 possono essere collegati in serie o in parallelo a una pila la cui forza elettromotrice e' V_0. Si indichi la potenza totale dissipata nei resistori nel primo caso (collegamento in serie) con Ps, e la potenza totale dissipata nei resistori nel secondo caso (collegamento in parallelo) con Pp. Si osserva che vale la relazione Pp = (9/2) * Ps.

3.1 Se la corrente fatta circolare nel circuito dalla pila nel caso del collegamento in serie e' Is=1A, dire quanto vale la corrente Ip nel caso del collegamento in parallelo.

3.2 Se $R_1=1\Omega$, trovare i possibili valori di R_2.

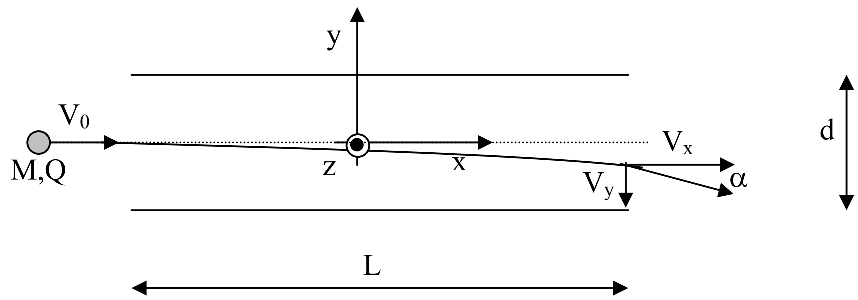
3.3 Per i valori di R_1 e R_2 trovati nel punto 3.2, dire quanto deve valere V_0 affinche' la pila faccia circolare nel circuito la corrente del punto 3.1, Is=1A.

.

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE 25 maggio 2006
RISPOSTE

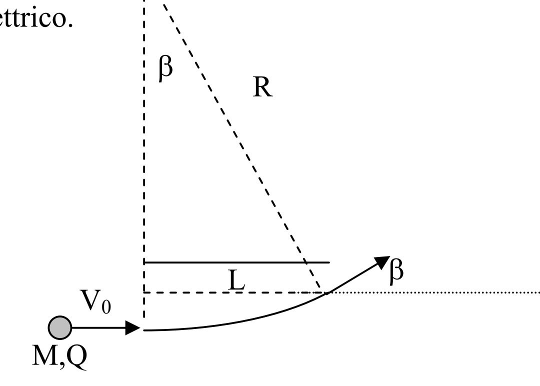
Esercizio 1

1.1 La componente x della velocita' e' costante, $V_x = V_0$. Lungo y il moto e' uniformemente accelerato con $a_y = QE/M = Q(V/d)/M$. L'accelerazione e' presente solo per l'intervallo di tempo $\Delta t = L/V_0$ in cui il protone resta dentro il condensatore. Quindi la componente y della velocita' finale del protone e' $V_y = a_y \Delta t = \frac{QVL}{dMV_0}$. Da $V_y/V_x = \tan\alpha$ si ricava $V = \frac{dMV_0^2}{QL}\tan\alpha = 1.0V$. Per deflettere il protone verso il basso il campo elettrico deve essere diretto lungo –y e quindi la lastra superiore e' quella a potenziale piu' alto.



1.2 Affinche' la deflessione del protone sia nulla, la forza magnetica $\vec{F}_m = Q\vec{V}_0 \wedge \vec{B}$ deve essere uguale e opposta alla forza elettrica $\vec{F}_e = Q\vec{E} = -Q\frac{V}{d}\hat{y}$. Essendo $\vec{V}_0 = V_0\hat{x}$ e $\vec{B} = B\hat{z}$, si ricava $\vec{F}_m = -QV_0B\hat{y}$, da cui $B = -\frac{V}{dV_0} = 10mT$.

1.3 Se nello spazio occupato dal condensatore c'e' un campo magnetico uniforme $\vec{B} = -\frac{V}{dV_0}\hat{z}$ ma non un campo elettrico, il protone compie un moto circolare uniforme nel piano xy finche' rimane nel volume del condensatore. Il raggio di curvatura e' $R = \frac{MV_0}{QB}$. All'uscita del condensatore l'angolo di deflessione (verso l'alto) e' dato da $\sin\beta = \frac{L}{R} = \frac{QBL}{MV_0}$, cioe' $\beta = 0.096rad$. Si noti che sostituendo 1.1 e la 1.2 in questa espressione si ottiene tan α=sin β. Per angoli piccoli questo corrisponde ad α=β. La deflessione e' nella direzione opposta a quella provocata dal campo elettrico.



Esercizio 2

2.1 Se la spira grande e' percorsa da una corrente I in senso antiorario, il campo magnetico da essa generato all'interno della spira piccola e' diretto verso l'alto e vale $B = \frac{\mu_0 I}{2b}$. Il flusso attraverso la spira piccola, quando l'angolo tra i piani delle due spire e' θ, vale $\phi = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \cos\theta$. Il coefficiente di mutual induzione e' $M = \phi / I = \frac{\mu_0}{2b}\pi a^2 \cos\theta$. Esso e' massimo quando vale $\cos\theta$ vale 1, cioe' quando le spire sono parallele ($\theta = 0$); in quel caso $M_{\max} = \frac{\mu_0}{2b}\pi a^2 = 40\,pH$

2.2 Quando la spira piccola e' posta in rotazione attorno al suo diametro con frequenza f, l'angolo θ varia nel tempo come $\theta = 2\pi ft$. C'e' una forza elettromotrice indotta nella spira piccola $f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = 2\pi f \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \sin(2\pi ft)$, e la corrente che scorre in essa e' $I(t) = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{\mu_0 \pi^2 a^2 fI}{bR}\sin(2\pi ft)$. La corrente e' massima in valore assoluto per $t = \frac{n+1/2}{2f}, n = 0,1,2...$, e vale $\mathrm{I}_{\max} = \frac{\mu_0 \pi^2 a^2 fI}{bR} = 1.24\,\mu A$

2.3 Per mantenere la spira in rotazione con velocita' angolare costante l'operatore deve esercitare un momento uguale e opposto all momento della forza magnetica agente sulla spira. Quindi: $\vec{\tau}_{op} = -\vec{\tau}_m = -\vec{\mu} \wedge \vec{B} = -I(t)\pi a^2 \hat{n} \wedge \vec{B} = -\frac{\mu_0{}^2 \pi^3 a^4 fI^2}{2b^2 R}\sin(2\pi ft)\hat{y}$. Il modulo del momento e' massimo per $t = \frac{n+1/2}{2f}, n = 0,1,2...$ e vale $\tau_{op,\max} = \frac{\mu_0{}^2 \pi^3 a^4 fI^2}{2b^2 R} = 4.9 \cdot 10^{-15}\,N\cdot m$

Esercizio 3

Resistori collegati in serie: $\mathrm{R}_{eq} = R_1 + R_2$, $I_S = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$, $P_S = V_0 I_S = \frac{V_0{}^2}{R_1 + R_2}$

Resistori collegati in parallelo: $\mathrm{R}_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $I_P = \frac{V_0(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$, $P_P = V_0 I_P = \frac{V_0^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$

3.1 $\frac{I_P}{I_S} = \frac{P_P/V_0}{P_S/V_0} = \frac{P_P}{P_P} = 9/2 = 4.5$. Siccome I_S=1 A, allora I_P=4.5 A

3.2 $\frac{P_P}{P_S} = \frac{\frac{V_0^2(R_1+R_2)}{R_1 R_2}}{\frac{V_0{}^2}{R_1+R_2}} = \frac{(R_1+R_2)^2}{R_1 R_2} = \frac{9}{2}$. Risolvendo l'equazione di secondo grado $R_2^2 - \frac{5}{2}R_1 R_2 + R_1^2 = 0$ in R_2, le due soluzioni possibili sono $R_2=2R_1=2\Omega$ e $R_2=(1/2)R_1 = 0.5\Omega$.

3.3 $V_0 = I_S(R_1 + R_2)$. Le due soluzioni sono, a seconda di quanto vale R_2, $V_0 = 1A(1\Omega + 2\Omega) = 3V$ e $V_0 = 1A(1\Omega + 0.5\Omega) = 1.5V$

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA PARZIALE del 5 giugno 2006

COGNOME ___________________________ **NOME** __________________________

NOTE:
- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**
- **I punteggi sono indicati in parentesi per ogni esercizio**

Costanti fisiche: $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$; $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$; $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$;

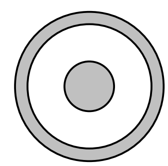
Esercizio 1

Una sbarra (di lunghezza L=50cm e massa M=10kg) e' incernierata senza attrito in un suo estremo C. La sbarra e' ferma in una posizione verticale, con il centro di massa piu' alto rispetto a C. Al tempo t=0 le viene data una piccola spinta in modo che inizi a ruotare. Si calcoli, quando ha effettuato una rotazione di π/2:

1.1 (2) la velocità angolare della sbarra
1.2 (2) la componente orizzontale dell'accelerazione del centro di massa della sbarra
1.3 (3) la componente verticale dell'accelerazione del centro di massa della sbarra
1.4 (3) le componenti orizzontale e verticale della forza esercitata dalla cerniera nel punto C sulla sbarra.

(Si ricordi che il momento di inerzia di una sbarra rispetto ad un estremo è $I=(1/3)\,ML^2$.)

Esercizio 2



Si considerino un cilindro pieno di raggio a=2mm coassiale con un guscio cilindrico di raggio interno b=5mm e raggio esterno c=6mm. I due cilindri sono entrambi alti H=1m (H>>a,b,c) e sono entrambi isolanti. Il cilindro interno è carico uniformemente con una densità ρ_1=500nC/m^3. Il guscio cilindrico è carico uniformemente con una densità ρ_2 ignota. Il campo elettrico all'esterno (r>c) è nullo.

2.1 (3) Calcolare ρ_2.
2.2 (3) Calcolare il campo elettrico nelle regioni r<a e a<r<b
2.3 (4) Calcolare il campo elettrico nella regione b<r<c. Riportare il campo elettrico per 0<r<c in un grafico.

Esercizio 3

Si consideri un solenoide di altezza H=50cm e raggio a=5mm (a<<H) formato da N=1000 spire. Il solenoide e' percorso, per t>0, da una corrente $I(t)=I_o\mathrm{sen}(2\pi ft)$ con I_o=1A e f=50kHz. Per le risposte si utilizzi un sistema di coordinate polari cilindriche, in cui l'asse z coincida con l'asse del solenoide.

3.1 (3) Quanto vale il campo magnetico all'interno del solenoide al tempo t= 5 μs ?
3.2 (3) Quanto vale il campo elettrico indotto in un punto P a distanza r dall'asse z all'interno del solenoide (r<a)? Calcolarlo numericamente per t=0 e r=a/2.
3.3 (3) Quanto vale il campo elettrico indotto in un punto P a distanza r dall'asse z all'esterno del solenoide (r>a, ma con r<<H)? Calcolarlo numericamente per t=0 e r=2a.
3.4 (3) Quanto vale la forza elettromotrice indotta ai capi del solenoide? Calcolarla numericamente per t=0.

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA PARZIALE del 30 giugno 2006

COGNOME ____________________________ **NOME** ___________________________

NOTE:
- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche quando possibile**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**
- **I punteggi sono indicati in parentesi per ogni esercizio**

Costanti fisiche: $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$; $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$; $\mathrm{g} = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$; $\mathrm{R_T} = 6378\mathrm{km}$
$|e| = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$; $\mathrm{m_e} = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $\mathrm{G} = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

Esercizio 1

Un satellite di massa m=2000kg si trova su un orbita circolare intorno alla terra con periodo di 12 ore. Calcolare:

1.1 (3) Il raggio dell'orbita del satellite e la sua velocità

1.2 (3) Il lavoro fatto per portare il satellite dalla sua posizione di quiete sulla superficie terrestre alla sua posizione nell'orbita (si trascuri la rotazione terrestre)

1.3 (3) Il satellite viene urtato da un asteroide di massa m_1=500kg che possiede una velocità v_1 = 10km/s nella stessa direzione e verso della velocità del satellite. L'asteroide rimane attaccato al satellite dopo l'urto. Calcolare la velocità dell'insieme satellite+asteroide dopo l'urto.

1.4 (3) Dire se il sistema satellite+asteroide rimarra in un'orbita intorno alla terra o sfuggirà all'attrazione terrestre.

Esercizio 2

La regione di spazio $-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$, con d=5cm, è riempita con una lastra di materiale isolante caricata uniformemente con una densità di carica ρ=1nC/m^3.

2.1 (4) Calcolare le tre componenti del campo elettrico (E_x, E_y, E_z) in tutto lo spazio e si riporti su un grafico l'andamento di E_x in funzione di x per $y=z=0$. Dare una valutazione numerica del campo elettrico all'esterno della lastra.

2.2 (4) Calcolare la differenza di potenziale tra il punto $\mathrm{A} = (-d/2, 0, 0)$ ed il punto $\mathrm{B} = (+d/2, 0, 0)$.

2.3 (4) Un elettrone viene rilasciato, da fermo, ad una distanza h=20cm dalla superficie della lastra. Calcolare con quale velocità l'elettrone colpirà la lastra.

Esercizio 3

Una spira quadrata di lato L=10cm e resistenza R=5Ω viene mantenuta in movimento con velocità costante v=1m/s diretta lungo l'asse x positivo. Nella regione di spazio $0 \le x \le D$ con D=3m è presente un campo magnetico costante ed uniforme diretto lungo z: $\vec{B} = B_z\hat{z}$ con $B_z = 0,25\,\mathrm{T}$.

3.1 (4) Calcolare la corrente indotta nella spira in funzione della posizione x del suo centro e riportarla su di un grafico.

3.2 (4) Calcolare la forza magnetica agente sulla spira in funzione della posizione x del suo centro e riportarla su di un grafico.

3.3 (4) Calcolare la il lavoro fatto dall'operatore che mantiene la spira in movimento per trasportare la spira attraverso la regione di campo magnetico (da $x \le -L/2$ a $x \ge D + L/2$)

SOLUZIONI

Esercizio 1

Dati: m=2000kg, T=12h=(12*3600)s=43200s, R_T=6378km, $g=\frac{GM_T}{R_T{}^2}=9.81\,m/s^2$, m_1=500kg, v_1 = 10km/s

1.1 $F=ma=\frac{GmM_T}{R^2}=mg\left(\frac{R_T}{R}\right)^2$, $a=\frac{V^2}{R}$, $V=\frac{2\pi R}{T}$

$$\Rightarrow \quad R=\left(\frac{gR_T^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}=26620km\,,\quad V=3.87\,km/s$$

1.2 $L_{mot}=\Delta E_{cin}+\Delta U_{grav}=\frac{1}{2}mV^2-GmM_T\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_T}\right)=\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R}-GmM_T\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_T}\right)$

$$=GmM_T\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2R}\right)=mgR_T\left(1-\frac{R_T}{2R}\right)=1.10\times10^{11}\,J$$

1.3 L'urto e' anelastico. Dalla conservazione della quantita' di moto: $(m+m_1)V'=mV+m_1v_1$

si ricava $V'=\frac{mV+m_1v_1}{m+m_1}=5.09\,\mathrm{km/s}$

1.4 La velocita' di fuga e' $V_f=\sqrt{\frac{2GM_T}{R}}=\sqrt{\frac{2gR_T^2}{R}}=5.48\,km/s$. Dato che $V'<V_f$, il sistema satellite+asteroide rimane in un'orbita intorno alla terra

Esercizio 2

2.1 Per simmetria il campo e' diretto lungo x $(E_y=0, E_z=0)$, non dipende da y e z $(E_x=E_x(x))$ ed e' simmetrico rispetto al piano yz $(E_x(-x)=-E_x(x))$. Applicando la legge di Gauss a un cilindro con asse parallelo a x, di sezione A, altezza 2x e centrato nell'origine: $\Phi_E=E(x)A-E(-x)A=2E(x)A$, $Q_{in}=\begin{cases}\rho A2x & (0<x<d/2)\\ \rho Ad & (x\ge d/2)\end{cases}$

$$\Rightarrow\ E(x)=\begin{cases}\rho x/\varepsilon_0=E_0\,2x/d & (|x|<d/2)\\ \rho d/2\,\varepsilon_0=E_0=2.82\,\mathrm{V/m} & (x\ge d/2)\\ -E_0 & (x\le -d/2)\end{cases}$$

2.2 $V(B)-V(A)=-\int_A^B\vec{E}\bullet d\vec{s}=-\int_{-d/2}^{d/2}E(x)\,dx=-\int_{-d/2}^{d/2}E_0\frac{2x}{d}\,dx=0$

2.3 Il moto e' uniformemente accelerato con accelerazione $a_x=\frac{-eE_0}{m_e}$. La velocita' con cui l'elettrone colpirà la lastra e' $V=\sqrt{2|a_x|h}=\sqrt{\frac{2eE_0h}{m_e}}=4.45\times10^5\,\mathrm{m/s}$

Esercizio 3

3.1 Il flusso del campo magnetico concatenato con la spira e' funzione della posizione x del suo centro: $$\Phi_B(x)=\begin{cases}0 & \left(x<-\frac{L}{2}, x>D+\frac{L}{2}\right)\\ L^2B_z & \left(\frac{L}{2}<x<D-\frac{L}{2}\right)\\ L\left(x+\frac{L}{2}\right)B_z & \left(|x|<\frac{L}{2}\right)\\ L\left(D+\frac{L}{2}-x\right)B_z & \left(|x-D|<\frac{L}{2}\right)\end{cases}$$

Quindi $$I(x)=\frac{\varepsilon(x)}{R}=-\frac{d\Phi_B(x)}{dt}=\begin{cases}0A & \left(x<-\frac{L}{2}, x>D+\frac{L}{2}, \frac{L}{2}<x<D-\frac{L}{2}\right)\\ -\frac{B_zLV}{R}=-5mA & \left(|x|<\frac{L}{2}\right)\\ \frac{B_zLV}{R}=5mA & \left(|x-D|<\frac{L}{2}\right)\end{cases}$$

3.2 Quando la spira e' completamente dentro o fuori la regione in cui e' presente il campo magnetico $\left(x<-\frac{L}{2}, x>D+\frac{L}{2}, \frac{L}{2}<x<D-\frac{L}{2}\right)$, la forza magnetica $\vec{F}=\oint Id\vec{L}\wedge\vec{B}$ e' 0. Quando invece la spira e' parzialmente contenuta nella regione in cui e' presente il campo magnetico $\left(|x|<\frac{L}{2}, |x-D|<\frac{L}{2}\right)$, la forza magnetica totale sui lati paralleli a x e' 0 (le forze sui due lati sono uguali ed opposte), ma quella sui lati perpendicolari a x e' non nulla:

$$F_x(x)=\oint I(x)d\vec{L}\wedge\vec{B}=\begin{cases}0 & \left(x<-\frac{L}{2}, x>D+\frac{L}{2}, \frac{L}{2}<x<D-\frac{L}{2}\right)\\ -\frac{B_z^2L^2V}{R}=1.25\times10^{-4}N & \left(|x|<\frac{L}{2}, |x-D|<\frac{L}{2}\right)\end{cases}$$

3.3 Per mantenere la spira in movimento con velocita' costante l'operatore deve applicare una forza uguale e opposta a quella magnetica del punto (3.2): $F_{op}(x)=-F_x(x)$. Il lavoro fatto dall'operatore e' l'integrale di linea della forza fatta dall'operatore lungo il percorso, che non e' altro che l'area del grafico di $F_{op}(x)=-F_x(x)$ compresa tra x<0 e x>D. Quindi $L=\int_{-L/2}^{D+L/2}-F_x(x)dx=\frac{2B_z^2L^3V}{R}=25\mu J$

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA del 18 luglio 2006

COGNOME ______________________________ **NOME** ____________________________

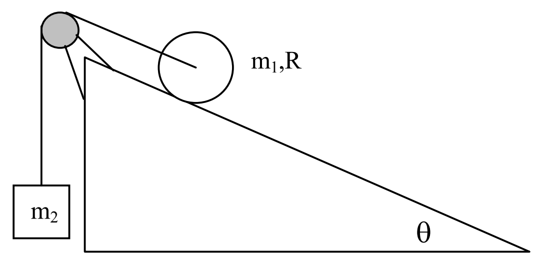
NOTE:
- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche quando possibile**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**
- **I punteggi sono indicati in parentesi per ogni esercizio**

Costanti fisiche: $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2};\ \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A};\ g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

Esercizio 1

Si consideri il sistema illustrato in figura.

Un cilindro di massa m_1 =10kg e raggio R=5cm si muove su un piano inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Il suo asse e' collegato ad un blocco di massa m_2=2kg tramite una fune di massa trascurabile che passa attorna ad una puleggia priva di attrito e di massa.



Calcolare:

1.1 (3) L'accelerazione del cilindro nel caso in cui non vi sia attrito tra il cilindro stesso e il piano inclinato (moto di puro strisciamento).

1.2 (5) L'accelerazione del cilindro nel caso in cui l'attrito con il piano inclinato sia tale da causare un moto di puro rotolamento del cilindro stesso.

1.3 (4) Nelle ipotesi del punto 1.2, la velocita' che ha il cilindro quando il blocco m_2 e' salito di una quota H=20cm rispetto alla posizione iniziale in cui entrambi i corpi sono fermi.

Esercizio 2

Due palline P_1 e P_2 di uguale massa m=20mg e uguale carica q=1nC sono collegate da una molla di costante elastica k=10N/m e lunghezza a riposo nulla. La pallina P_1 è fissa nell'origine (0,0,0), mentre la pallina P_2 è vincolata a muoversi lungo l'asse x.

2.1 (3) Calcolare qual e' la posizione di equilibrio x_0 della pallina P_2.

2.2 (4) Scrivere l'energia potenziale del sistema in funzione della posizione x della pallina P_2 e rappresentarla su un grafico.

2.3 (5) All'istante t=0 la pallina P_2 viene spostata in x=2x_0 e lasciata libera da ferma. Utilizzando il grafico del punto 2.2, calcolare qual è la velocitá massima che P_2 raggiunge per t>0, e quale è il valore di x corrispondente.

Esercizio 3

Un circuito piano formato da una resistenza R=1MΩ collegata in serie con un condensatore di capacitá C=1nF racchiude una superficie di area A=10cm^2. Nella regione di spazio occupata dal circuito è presente un campo magnetico uniforme diretto lungo un asse z perpendicolare al piano del circuito e variabile per t>0 secondo la formula: $\vec{B} = \left(B_0 \dfrac{t}{t_0}\right)\hat{z}$ con $B_0 = 0{,}05\ \mathrm{T}$, $t_0 = 1\,\mathrm{s}$.

3.1 (2) Indicare il verso della corrente indotta

3.2 (3) Calcolare qual è la carica massima accumulata sulle armature del condensatore.

3.3 (5) Determinare la corrente I(t) che scorre nel circuito in funzione del tempo e riportarla in un grafico, indicando in particolare il valore massimo, a quale istante esso viene raggiunto, e qual è la corrente finale per t→∞.

SOLUZIONI

Esercizio 1

1.1 Proiettando la II equazione di Newton per i due corpi nella direzione del loro moto, tenendo conto che le uniche forze che agiscono in questa direzione sono la tensione T del filo e la componente della forza peso parallela al moto e che le accelerazioni lineari dei due corpi sono le stesse:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\theta - T \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{m_1 \sin\theta - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{3}{12} g = 2.45 \, m/s^2$$

1.2 Non si puo' procedere come prima perche' ora compare anche la forza di attrito statico tra il cilindro e il piano inclinato che e' incognita. Per il cilindro quindi la II equazione di Newton va sostituita con la II equazione cardinale della dinamica (τ=Iα), calcolata rispetto a un punto di contatto tra il cilindro e il piano inclinato ($I=3/2 m_1 R^2$):

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_1 R^2 \alpha = m_1 g \sin\theta R - TR \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} m_1 a = m_1 g \sin\theta - T \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m_1 \sin\theta - m_2}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} g = \frac{3}{17} g = 1.73 \, m/s^2$$

dove si e' fatto uso della relazione $a=\alpha R$ tra l'accelerazione lineare a di m_2 e l'accelerazione angolare α del cilindro

1.3 L'accelerazione lineare del centro di massa del cilindro e' costante ed e' stata calcolata al punto 1.2. Il suo spostamento parallelo alla direzione del moto e' H. Quindi $V = \sqrt{2aH} = \sqrt{2 \frac{m_1 \sin\theta - m_2}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} gH} = 0.83 \, m/s$. Allo stesso risultato si puo' arrivare imponendo che la variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 R^2\right)\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2\right) V^2$$

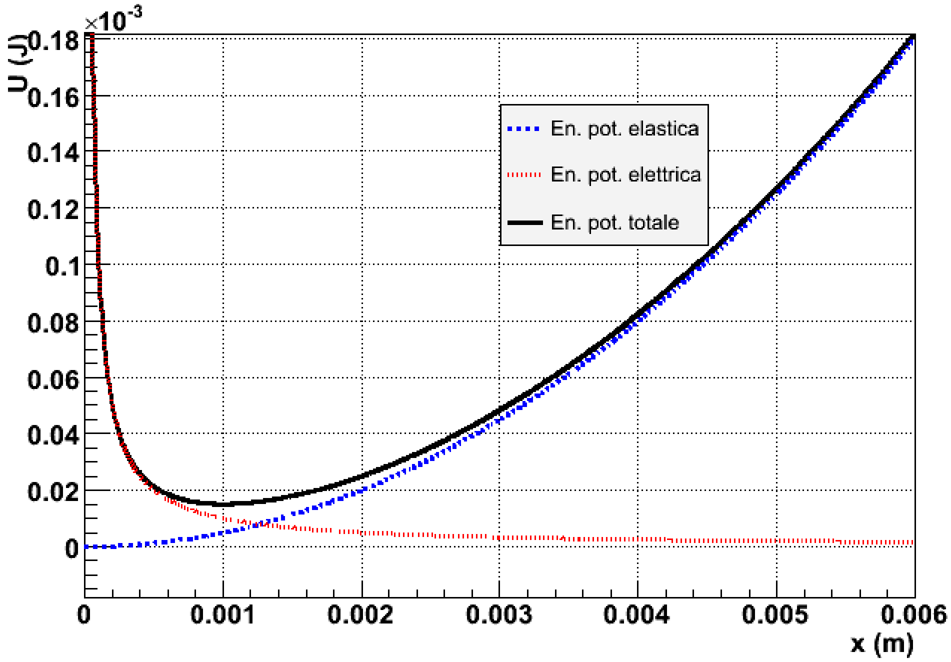
sia uguale alla differenza tra l'energia potenziale gravitazionale iniziale e quella finale (dato che la forza di attrito statico non fa lavoro):

$$-\Delta E_{pot} = m_1 gH \sin\theta - m_2 gH = \left(m_1 \sin\theta - m_2\right) gH$$

Esercizio 2

2.1 All'equilibrio la repulsione elettrostatica deve essere uguale alla forza di richiamo della molla: $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2} = kx_0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k}} = 0.97 \, mm$

2.2 L'energia potenziale totale e' la somma dell'energia potenziale elastica e di quella elettrostatica: $U(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 |x|} = \frac{1}{2} kx^2 \left(1 + 2\left(\frac{x_0}{|x|}\right)^3\right)$. Il grafico del termine elastico nel piano (x,U) e' una parabola con concavita' verso l'alto, e' nullo in x=0 e tende a +inf. per x→inf. Il grafico del contributo elettrostatico e' una iperbole equilatera, che diverge a x=0 e tende a 0 per x→inf. La somma e' una funzione positiva che tende a infinito sia a x=0 che per x→inf., e che ha un minimo in x=x_0. Il minimo vale $U(x_0)=\frac{3}{2}kx_0^2=15\,\mu J$ Il suo grafico e' riportato in figura.



2.3 Il sistema e' conservativo, quindi l'energia meccanica all'istante iniziale deve essere uguale all'energia meccanica nell'istante in cui la velocita' e' massima. All'istante iniziale l'energia cinetica e' nulla e l'energia potenziale e'

$$U(2x_0)=\frac{1}{2}k(2x_0)^2\left(1+2\left(\frac{x_0}{2x_0}\right)^3\right)=\frac{5}{2}kx_0^{\ 2}$$

L'energia meccanica totale a un generico istante t e' quindi:

$$E=\frac{1}{2}mV^2+U(x)=\mathrm{cost}=\frac{5}{2}kx_0^{\ 2}$$

Essendo E=costante, la velocita' e' massima quando l'energia potenziale e' minima, quindi per x=x_0. In tal caso l'energia meccanica vale

$$E(x_0)=\frac{1}{2}mV_{\max}^2+U(x_0)=\frac{1}{2}mV_{\max}^2+\frac{3}{2}kx_0^2$$

da cui si ricava $V_{\max}=\sqrt{\frac{2k}{m}}x_0=0.97\,m/s$

Esercizio 3

3.1 Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito e' 0 per t<0. Per t>o il flusso e' $\Phi_B(t)=B(t)A=B_0\frac{t}{t_0}A$, dove il versore normale al circuito viene considerato orientato lungo +z. La forza elettromotrice indotta e' quindi

$$\varepsilon(t)=-\frac{d\Phi_B(t)}{dt}=\begin{cases}0V & (t<0)\\ -\frac{B_0A}{t_0}=-V_0-50\mu V & (t\ge 0)\end{cases}$$

Quindi per t>0 c'e' una corrente indotta, che – dato il segno della forza elettromotrice – circola in senso orario attorno all'asse z.

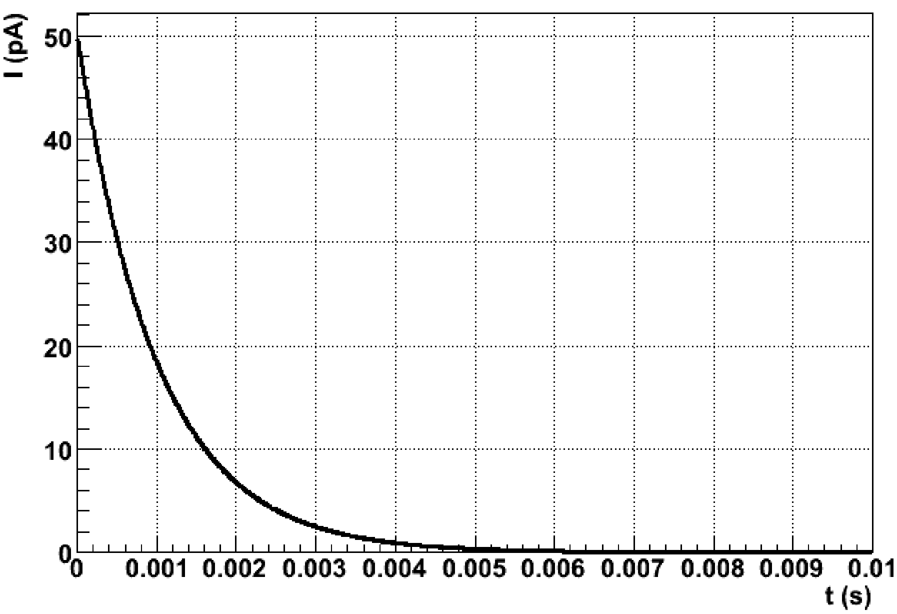
3.2 Il circuito per t>0 e' un circuito RC con una forza elettromotrice costante pari a 50μV. Il condensatore quindi si carica progressivamente fino a un valore asintotico $Q = CV_0 = 50 \bullet 10^{-15} C$

3.3 La variazione nel tempo della carica sulla armatura positiva del condensatore e della corrente nel circuito sono date dalle ben note espressioni:

$$Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

La corrente che scorre nel circuito e' massima all'istante iniziale t=0, dove vale $I(0) = \frac{V_0}{R} = 50\,pA$, e tende a 0 per t→inf.



FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA del 22 settembre 2006

NOTE:
- **Tempo a disposizione: 2h 30m**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche quando possibile**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**
- **I punteggi sono indicati in parentesi per ogni esercizio**

Costanti fisiche: $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$; $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$; $c = 3\mathrm{x}10^8\ \mathrm{m/s}$

Esercizio 1

Uno sciatore di massa *m* e' seduto sul piattello di uno skilift che lo sta trascinando lungo un tratto di pendio orizzontale. Lo skilift si puo' schematizzare come una molla di costante elastica k=500N/m e lunghezza a riposo L_0=1.5m, collegata ad una estremita' al piattello e agganciata all'altra estremita' ad un cavo che scorre parallelo a terra ad una quota H=3m rispetto a terra. Le gambe dello sciatore sono lunghe D=1m.

1.1 (3) Quanto deve essere la massa minima dello sciatore affinche' esso tocchi terra se lo skilift e' in posizione verticale ?

1.2 (4) Quanto deve essere la massa minima dello sciatore affinche' esso tocchi terra se lo skilift anziche' essere in posizione verticale forma con la verticale un angolo θ=30° ?

1.3 (4) Nella ipotesi che θ=30° e m=80kg, calcolare il coefficiente d'attrito dinamico tra gli sci e la neve sapendo che lo sciatore si muove con velocita' costante.

Esercizio 2

Un elettrone (carica $Q_e = -e = -1.6\mathrm{x}10^{-19}$ C, massa m_e=9.11x10^{-31} kg) e' in orbita attorno a un nucleo di elio (carica 2*e*) fisso.

2.1 (4) Dire quali delle seguenti quantita' si conservano nel moto dell'elettrone e perche': quantita' di moto, momento angolare, energia cinetica, energia potenziale, energia meccanica.

2.2 (3) Se l'elettrone percorre un'orbita circolare attorno al nucleo di elio con velocita' v_0=*c*/100, trovare il raggio r_0 dell'orbita.

2.3 (4) Calcolare per un'orbita circolare di raggio generico *r* il rapporto tra energia potenziale ed energia cinetica. Se l'elettrone passa da un'orbita circolare di raggio r_0 ad una di raggio r_0/2, quanto e' il rapporto tra l'energia meccanica finale e quella iniziale?

Esercizio 3

Un filo rettilineo infinito disposto lungo l'asse z e' percorso da una corrente I_0=10A diretta lungo $+\hat{z}$.

3.1 (3) Calcolare il modulo $|\vec{B}|$ e le componenti (B_x, B_y, B_z) del vettore campo magnetico nel punto generico $\vec{P} = (x, y, 0)$ e dare i valori numerici per il punto $\vec{P}_0 = (1\,\mathrm{cm}, 2\,\mathrm{cm}, 0)$.

3.2 (4) Si dica se l'integrale $\int_{-\vec{P}_0}^{\vec{P}_0} \vec{B}\cdot d\vec{s}$ dipende dal percorso di integrazione e perche'. In caso negativo se ne calcoli il valore lungo un percorso a scelta. In caso affermativo se ne calcoli i valori su due percorsi a scelta e si mostri che sono diversi.

3.3 (4) Una particella carica con q=1nC si muove con velocita' $\vec{v}_0 = +(100\ \mathrm{m/s})\hat{z}$ e passa al tempo t=0 per il punto $\vec{P}_0$. Calcolare il modulo e le componenti (F_x, F_y, F_z) della forza magnetica agente sulla particella a t=0. Se invece la particella passasse con velocita' $-\vec{v}_0$ per il punto $-\vec{P}_0$, quanto sarebbe la forza magnetica ?

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2005/2006
PROVA SCRITTA del 22 settembre 2006 - SOLUZIONI

Esercizio 1

1.1 Se lo sciatore tocca terra, la molla dello skilift in posizione verticale deve essere lunga L=H-D=2m, l'accelerazione verticale dello sciatore e' nulla e quindi la componente verticale della forza agente sullo sciatore e' anch'essa nulla.
Le forze che agiscono sullo sciatore e hanno componente verticale (y) diversa da zero sono la forza peso, rivolta verso il basso ($F_{p,y}$=-mg), la forza elastica, rivolta verso l'alto ($F_{el,y}$=k(L-L_0)=k(H-D-L_0)) e la reazione vincolare del terreno, la cui componente verticale N deve essere diretta verso l'alto (cioe' N≥0).
Quindi: $k\left[\left(H-D\right)-L_0\right]+N-mg=0$, da cui $0\le N=mg-k\left[\left(H-D\right)-L_0\right]$, ovvero

$$m\ge\frac{k\left[\left(H-D\right)-L_0\right]}{g}=25.5kg$$

1.2 Nel caso θ=30° la molla deve essere lunga L=(H-D)/cosθ=2.31m, e la componente verticale della forza elastica e' $F_{el,y}$=k(L-L_0)cosθ=k((H-D)/cosθ-L_0)cosθ=k[(H-D)-L_0cosθ].
Quindi: $k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]+N-mg=0$, da cui $0\le N=mg-k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]$,

ovvero $m\ge\frac{k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]}{g}=35.7kg$

1.3 Se lo sciatore si muove con velocita' costante, la risultante delle forze agenti su di esso deve essere nulla. Proiettando l'equazione del moto lungo x (asse orizzontale) e y (asse verticale) si deve avere:

$$\begin{array}{l} k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]+N-mg=0 \text{ (asse y)} \\ k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]\tan\theta-\mu_D N=0 \text{ (asse x)} \end{array}$$

. Quindi:

$$\mu_D=\frac{k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]\tan\theta}{N}=\frac{k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]\tan\theta}{mg-k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]}=\frac{\tan\theta}{\dfrac{mg}{k\left[\left(H-D\right)-L_0\cos\theta\right]}-1}=0.47$$

Esercizio 2

2.1 L'elettrone e' soggetto a una forza non nulla (la forza elettrica) e quindi la quantita' di moto non si conserva. La forza e' centrale quindi il momento angolare rispetto al punto in cui si trova il nucleo di elio si conserva. La forza elettrica e' conservativa quindi l'energia meccanica si conserva; non si conservano in generale separatamente l'energia cinetica e l'energia potenziale, a meno che la traiettoria non sia una circonferenza attorno al nucleo di elio (in quel caso la forza elettrica e' perpendicolare alla velocita' e quindi non fa lavoro, quindi l'energia cinetica e' costante, e la distanza dal nucleo di elio e' costante quindi anche l'energia potenziale e' costante).

2.2 Se l'elettrone percorre un'orbita circolare attorno al nucleo di elio con velocita' $v_0=c/100$, la sua accelerazione e' v_0^2/r_0 e dalla II legge di Newton segue che $m_e a=m_e\frac{v_0^2}{r_0}=F=\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$, da cui $r_0=\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}=2\times10^4\times\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}=5.6\times10^{-11}m$

2.3 Dal punto precedente si puo' ricavare che $v_0^2=\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_0}$ L'energia cinetica dell'elettrone e' $K=\frac{1}{2}m_e v_0^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ e l'energia potenziale e' $U=-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=-2K$. Quindi il rapporto

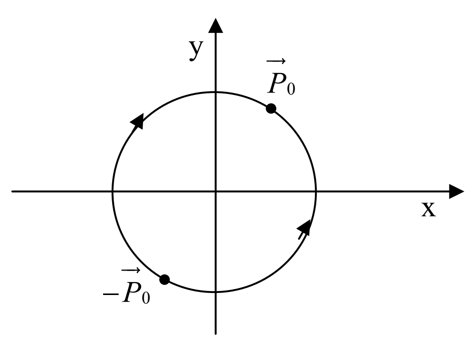
U/K=-2 non dipende dal raggio dell'orbita, e l'energia meccanica totale e' $E = U + K = U - \frac{U}{2} = \frac{U}{2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$. Passando da un'orbita di raggio r_0 a un raggio $r_0/2$, il rapporto tra l'energia meccanica finale e quella iniziale e' $\frac{E_{fin}}{E_{in}} = \frac{-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (r_0/2)}}{-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}} = 2$

Esercizio 3

3.1 Il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente e' tangente a circonferenze parallele al piano xy e centrate sull'asse z, l'espressione del campo e' la seguente: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left(-\frac{y}{r}\hat{i} + \frac{x}{r}\hat{j}\right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\left(-y\hat{i} + x\hat{j}\right)$.

Il modulo e' $\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} = 89\mu T$, le componenti sono $B_x = -\frac{y}{r}\left|\vec{B}\right| = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left|\vec{B}\right| = -80\mu T$, $B_y = \frac{x}{r}\left|\vec{B}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\vec{B}\right| = 40\mu T$, $B_z = 0T$.

3.2 Il campo magnetico non e' conservativo, quindi l'integrale di linea $\int_{-\vec{P}_0}^{\vec{P}_0} \vec{B}\cdot d\vec{s}$ dipende dal percorso di integrazione. Si considerino infatti come percorsi alternativi le due semicirconferenze del piano xy, con centro nell'origine, che vanno da $-\vec{P}_0$ a $\vec{P}_0$



Nella semicirconferenza percorsa in verso antiorario $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ sono paralleli e concordi, e l'integrale $\int_{-\vec{P}_0}^{\vec{P}_0} \vec{B}\cdot d\vec{s}$ vale $\left|\vec{B}\right|\pi r = \frac{\mu_0 I_0}{2} = 6.28\mu T\cdot m$. Nella semicirconferenza percorsa in verso orario $\vec{B}$ e $d\vec{s}$ sono paralleli e discordi, e l'integrale $\int_{-\vec{P}_0}^{\vec{P}_0} \vec{B}\cdot d\vec{s}$ vale $-\left|\vec{B}\right|\pi r = -\frac{\mu_0 I_0}{2} = -6.28\mu T\cdot m$.

3.3 La forza magnetica e' $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$. Dato che la velocita' e il campo magnetico sono tra loro perpendicolari, il modulo della forza magnetica a t=0 e' dato semplicemente da

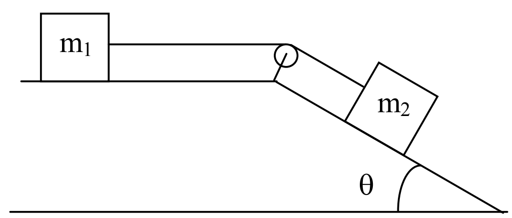
$\left|\vec{F}\right| = q\left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}\left(\vec{P}_0\right)\right| = 8.9\,pN$. Le componenti sono $F_x = -qvB_y = -4\,pN$, $F_y = qvB_x = -8\,pN$, $F_z = 0$. La forza e' diretta verso il centro della circonferenza. Se la particella passa con velocita' $-\vec{v}_0$ per il punto $-\vec{P}_0$, la forza e' identica perche' $\vec{B}\left(-\vec{P}_0\right) = -\vec{B}\left(\vec{P}_0\right)$ e quindi $\vec{F}\left(-\vec{P}_0, -\vec{v}_0\right) = q\left(-\vec{v}_0\right) \wedge \vec{B}\left(-\vec{P}_0\right) = -q\vec{v}_0 \wedge \left[-\vec{B}\left(\vec{P}_0\right)\right] = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}\left(\vec{P}_0\right) = \vec{F}\left(\vec{P}_0, \vec{v}_0\right)$

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2006/7
PROVA SCRITTA PARZIALE del 24 novembre 2006

NOTE:

- **Tempo a disposizione: 2h**
- **E' obbligatorio giustificare brevemente ma in modo esauriente e comprensibile le risposte e dare le valutazioni numeriche**
- **Scrivere solo sui fogli forniti e restituirli tutti**

Esercizio 1 Due blocchi di massa m_1=10kg e m_2=2kg sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile. Il primo corpo si trova su una superficie orizzontale, mentre il secondo si trova su di un piano inclinato con angolo θ=30°, come indicato in figura.



1.1 (4) Si considerino le superfici prive di attrito. Calcolare l'accelerazione del corpo 1.
1.2 (4) Si considerino la superficie e il piano orizzontale scabri con coefficiente di attrito dinamico μ_D. Supponendo che i blocchi si stiano muovendo, determinare le espressioni delle forze di attrito dinamico agenti sui due blocchi in funzione di μ_D e degli altri dati del problema.
1.3 (4) I blocchi, inizialmente in quiete, si mettono i moto e dopo che il blocco 1 ha percorso una distanza d=20cm la velocita' del blocco e' v_1=0.1m/s. Si determini quanto vale il coefficiente di attrito dinamico μ_D.
1.4 (4) Se invece i blocchi rimangono fermi nella configurazione indicata in figura, si scriva la <u>somma</u> delle forze di attrito statico agenti sui blocchi in funzione del coefficiente di attrito statico μ_S e si calcoli qual e' il valore minimo di μ_S affinche' i corpi rimangano in quiete.

Esercizio 2 Un atleta di massa m=70kg salta da un ponte alto H=40m legato ad una corda elastica di lunghezza a riposo L_0=30m, la cui altra estremita' e' ben fissata alla spalletta del ponte. A differenza di una molla, una corda elastica e' in tensione, e quindi esercita una forza elastica, solo quando e' allungata rispetto alla sua lunghezza a riposo. Inizialmente la corda elastica e' srotolata e non e' in tensione.
2.1 (4) Calcolare per quanto tempo l'atleta cade prima che la corda elastica entri in tensione.
2.2 (4) Calcolare quale deve essere la costante elastica k della corda affinche' l'atleta si fermi ad una distanza d=5m dalla superficie del fiume
2.3 (4) Scrivere l'espressione, in funzione di k, della forza esercitata dalla corda sulla spalletta del ponte quando l'atleta si trova nel punto piu' basso. Si indichino direzione e verso, e se ne calcoli il modulo utilizzando il valore di k ottenuto al punto precedente
2.4 (4) Determinare la distanza y dal ponte della posizione di equilibrio dell'atleta

FISICA GENERALE per INGEGNERIA GESTIONALE 24 novembre 2006
RISPOSTE

Esercizio 1

1.1 L'accelerazione del primo corpo e' orizzontale, quella del secondo e' parallela al piano inclinato. Le due accelerazioni devono avere lo stesso modulo, che chiamiamo a. Proiettiamo la seconda legge di Newton, applicata ai due corpi, nella direzione del moto:

$$\begin{cases} m_1 a = T \\ m_2 a = m_2 g \sin\theta - T \end{cases}$$

dove T e' la tensione del filo, uguale (in modulo) in tutti i suoi punti. Si ricava, sommando le due equazioni, $a = \dfrac{m_2 \sin\theta}{m_1 + m_2} g = \dfrac{g}{12} = 0.82 \dfrac{m}{s^2}$

1.2 La reazione vincolare esercitata dalle superfici sui due blocchi deve bilanciare la componente della forza peso perpendicolare alla superficie stessa, quindi $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g \cos\theta$. Quindi le forze di attrito dinamico che si esercitano sui due blocchi in movimento sono parallele alle superfici, opposte alla direzione del moto, e hanno moduli $F_{d1} = \mu_D N_1 = \mu_D m_1 g$, $F_{d2} = \mu_D N_2 = \mu_D m_2 g \cos\theta$

1.3 Sui corpi 1 e 2 agiscono le seguenti forze:

- la forza peso, che e' conservativa e il cui lavoro nello spostamento considerato e' quindi $L_g = -\Delta U_g = -\Delta U_{g1} - \Delta U_{g2} = -m_1 g \Delta h_1 - m_2 g \Delta h_2$, dove $\Delta h_1 = 0$, $\Delta h_2 = -d\sin\theta$
- le reazioni normali delle superfici, che essendo perpendicolari allo spostamento non compiono lavoro;
- le forze $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ (tensioni) esercitate sui due corpi dal filo, che sono uguali in modulo ($T_1 = T_2$), ma il lavoro fatto dalla tensione sul corpo 1 e' opposto a quello fatto dalla tensione del filo sul corpo 2 (stesso spostamento in valore assoluto, ma in un caso la tensione ha lo stesso verso dello spostamento, nell'altro ha verso opposto: $\vec{T}_2 \bullet d\vec{l}_2 = -\vec{T}_1 \bullet d\vec{l}_1$)
- le forze di attrito dinamico $\vec{F}_{d1}$ e $\vec{F}_{d2}$, costanti ed opposte allo spostamento, che fanno lavoro $L_d = L_{d1} + L_{d2} = -F_{d1} d - F_{d2} d = -\mu_D g d \left(m_1 + m_2 \cos\theta\right)$

Dal teorema delle forze vive il lavoro totale di tutte queste forze e' uguale alla variazione di energia cinetica dei corpi 1 e 2: $\Delta K_1 + \Delta K_2 = L = L_1 + L_2$ quindi, essendo nulla la velocita' iniziale e v_1 la velocita' finale:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_1^2 = m_2 g d \sin\theta - \mu_D g d \left(m_1 + m_2 \cos\theta\right)$$

da cui

$$\mu_D = \frac{m_2 g d \sin\theta - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_1^2}{g d \left(m_1 + m_2 \cos\theta\right)} = 0.083$$

1.4 Se i blocchi non si muovono e c'e' attrito (statico) con le superfici di appoggio:

$$\begin{cases} m_1 a = 0 = T - F_{s1} \\ m_2 a = 0 = m_2 g \sin\theta - T - F_{s2} \end{cases}$$

da cui sommando si ricava $F_{s1} + F_{s2} = m_2 g \sin\theta$. Siccome $|F_{s1}| \le \mu_S N_1 = \mu_S m_1 g$ e $|F_{s2}| \le \mu_S N_2 = \mu_S m_2 g \cos\theta$, si trova $m_2 g \sin\theta = F_{s1} + F_{s2} \le |F_{s1}| + |F_{s2}| \le \mu_S g \left(m_1 + m_2 \cos\theta\right)$ e in conclusione:

$$\mu_S \ge \frac{m_2 \sin\theta}{m_1 + m_2 \cos\theta} = 0.085$$

Esercizio 2

2.1 L'atleta e' in caduta libera fino a quando raggiunge la distanza L_0 dal ponte, da quel momento la corda inizia ad allungarsi ed entra in tensione. Il tempo impiegato dall'atleta per cadere di un tratto L_0 sotto l'effetto dell'accelerazione di gravita' e' (moto uniformemente accelerato):

$$t = \sqrt{\frac{2L_0}{g}} = 2.47s$$

2.2 La forza peso e la forza elastica sono conservative, quindi l'energia meccanica all'inizio del lancio (altezza H=40m, corda non tesa) deve essere uguale a quella nel punto piu' basso del lancio (altezza d=5m, corda allungata di $\Delta L = H - d - L_0$=5m). In entrambi i punti la velocita' istantanea dell'atleta e' nulla (e quindi l'energia cinetica e' nulla), in conclusione:

$$mgH = mgd + \frac{1}{2}k\left(H - d - L_0\right)^2$$

da cui

$$k = \frac{2mg\left(H - d\right)}{\left(H - d - L_0\right)^2} = 1923\frac{N}{m}$$

2.3 La forza esercitata dalla corda sulla spalletta del ponte e' verticale, diretta verso il basso e vale in modulo $k\left(H - d - L_0\right) = 9614N$

2.4 Nel punto di equilibrio la forza peso $\vec{F}_P = -mg\hat{y}$ e la forza elastica $\vec{F}_{el} = k\left(y - L_0\right)\hat{y}$ $\left(y \ge L_0\right)$ si devono annullare, quindi $y = L_0 + \frac{mg}{k} = 30.4m$