Cognome | *Nome* | *Numero di matricola*

Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Civile (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/2012 Test di Autovalutazione 22/11/2011.

- Tempo a disposizione: 2h. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: scrivere la formula parametrica della risposta nello spazio grande e la risposta numerica nello spazio piccolo. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Una piccola sfera di massa m=5kg, appesa ad un punto fisso tramite una fune di massa trascurabile e lunghezza L=1.0m, viene dapprima sollevata finche la stessa cordicella sia orizzontale, e poi lasciata andare. Si consideri l'angolo θ formato tra la fune e la verticale.

Quesito 1.1 Trovare la tensione della fune in funzione di θ, e calcolarla numericamente per $\theta = 0$.

T[N]=

Quesito 1.2 Trovare l'angolo θ_H nel momento in cui l'accelerazione della sfera è orizzontale.

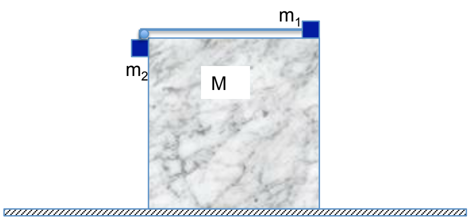
θ_H[rad]=

Quesito 1.3 Si consideri invece adesso il caso in cui la sferetta viene invece lasciata cadere da un punto alla stessa altezza del punto di fissaggio della fune, ma posto ad una distanza αL da esso con $\alpha = 0.8$, per cui la corda non è in tensione all'inizio del moto. La sferetta dapprima cade sotto l'azione della gravità e solo successivamente percorre la traiettoria circolare determinata dalla fune. Calcolare in questo caso la velocità della sfera quando transita nel punto più basso.

v_1[m/s]=

Problema 2:

Un grosso cubo di massa $M = 25$ kg e di lato $L = 1.5$ m è appoggiato sul pavimento, sul quale può scorrere senza attrito. Ad un'estremità del cubo è posizionata una massa $m_1 = 4.0$ kg, collegata con una fune inestensibile e priva di massa, attraverso una carrucola, ad un recipiente appeso sul lato del cubo ad un'altezza L da terra, come mostrato in figura. Tra la massa m_1 e la superficie del cubo c'è attrito, con coefficienti $\mu_S = 0.8$ e $\mu_D = 0.6$. Inizialmente il sistema è fermo. Il recipiente viene gradualmente riempito d'acqua.



Quesito 2.1 Calcolare la massa totale m_2 del recipiente con l'acqua per cui le due masse iniziano a muoversi.

m_2[kg]=

Quesito 2.2 Appena il sistema inizia a muoversi il riempimento di ferma. Calcolare di quanto si è spostato il cubo quando il recipiente tocca terra. Si trascurino le dimensioni del recipiente.

Δx_C[m]=

Quesito 2.3 Calcolare la velocià di m_2 quando tocca terra.

v_2[m/s]=

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 L'equazione del moto in direzione radiale, considerando come verso positivo quello che va dalla pallina al punto di sospensione, per θ generico, é data da

$$ma_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2(\theta)}{l} \tag{1}$$

dove abbiamo imposto che la componente radiale a_r sia uguale all'accelerazione centripeta della pallina. Dall'equazione 1 possiamo ricavare la tensione della fune in funzione di θ se conosciamo la velocitá in funzione dello stesso angolo; a tal proposito osserviamo che, poiché l'energia totale si conserva, abbiamo

$$0 = \frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgl\cos\theta \tag{2}$$

dove il primo membro rappresenta l'energia totale all'istante iniziale ed il secondo l'energia al generico angolo θ e lo zero del potenziale é stato preso al livello del soffitto. Risolvendo la 2 si ottiene

$$v(\theta) = \sqrt{2gl\cos\theta} \tag{3}$$

da cui, sostituendo nella 1,

$$T = 3mg\cos\theta \tag{4}$$

che per $\theta = 0$ vale

$$T = 3mg = 147 \text{ N}. \tag{5}$$

Quesito 1.2 Per trovare l'angolo per il quale l'accelerazione é orizzontale dobbiamo imporre che la corrispondente componente verticale si annulli; consideriamo dunque un sistema di riferimento con asse x parallelo al soffitto diretto verso destra ed asse y verticale diretto verso l'alto. In questo sistema abbiamo che

$$ma_y = T(\theta)\cos\theta - mg \tag{6}$$

quindi, imponendo $a_y = 0$ e sostituendo a T il valore ottenuto in precedenza si ottiene subito

$$3mg\cos^2\theta = mg \tag{7}$$

ovvero

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.95 \text{ rad}. \tag{8}$$

Quesito 1.3 Se la pallina parte a distanza αL dal punto di attacco della fune percorrerá una distanza verticale

$$h = l\sqrt{1-\alpha^2} \tag{9}$$

prima di subire la tensione della fune ed avrá in quel punto una velocitá data da

$$v_0 = \sqrt{2gl\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{10}$$

Osserviano che, a causa della reazione impulsiva di T, si conserva solo la componente tangenziale della quantitá di moto e non quella radiale; avremo quindi che dopo che subito dopo che la fune ha cominciato ad esercitare T la velocitá sará data da

$$v_t = v_0\sin\theta_0 \tag{11}$$

A questo punto possiamo applicare la conservazione dell'energia e, prendendo nuovamente lo zero del potenziale all'altezza del soffitto e denotanto con v_1 la velocitá nel punto piú basso della traiettoria, abbiamo

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - mgl = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\theta_0 - mgl\cos\theta_0 \tag{12}$$

dove $\theta_0 = \arcsin(\alpha l/l)$ é l'angolo, calcolato rispetto alla verticale, corrispondente all'altezza 9. Risolvendo la 12 si ottiene

$$v_1 = 2gl(1-(1-\alpha^2)^{3/2}) = 15.37 \text{ m/s}. \tag{13}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Scriviamo la prima equazione cardinale per la massa m_1 in un sistema di riferimento (curvo) diretto come la fune con verso da m_1 a m_2; se il sistema é all'equilibrio si ha

$$m_1 a_1 = T - F_s = 0. \tag{14}$$

La tensione della fune puó essere ricavata dalla corrispondente equazione per m_2, ovvero

$$m_2 a_2 = m_2 g - T = 0 \tag{15}$$

da cui si ottiene che all'equilibrio deve valere $F_s = m_2 g$. Poiché il massimo valore di F_s é dato da $F_{s,max} = \mu_s N$ dove con $N = m_1 g$ si ottiene che il sistema rimarrá all'equilibrio fintanto che

$$F_{s,max} = \mu_s N \geq m_2 g \tag{16}$$

ovvero che il valore limite di m_2 per cui il sistema comincia a muoversi é

$$m_2 = \mu_s m_1 = 3.2 \text{ Kg}. \tag{17}$$

Quesito 2.2 Consideriamo ora un sistema di riferimento con asse x parallelo al suolo diretto verso destra, asse y verticale verso l'alto e con l'origine coincidente con lo spigolo inferiore sinistro del blocco prima che lo stesso cominci a muoversi. Poiché non ci sono forze esterne longitudinali agenti sul sistema la quantitá di moto orizzontale si deve conservare e di conseguenza la posizione del centro di massa del sistema deve rimanere invariata. Prima che il sistema cominci a muoversi si ha

$$x_{CM} = \frac{m_1 L + ML/2}{m_1 + m_2 + M} \tag{18}$$

mentre quando il recipiente tocca terra si ha

$$x_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\Delta x + M(L/2 + \Delta x)}{m_1 + m_2 + M}. \tag{19}$$

Imponendo, per quanto detto sopra, l'uguaglianza della 18 e 19 si ottiene

$$m_1 L + ML/2 = (m_1 + m_2)\Delta x + M(L/2 + \Delta x) \tag{20}$$

ovvero

$$\Delta x = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2 + M} = 0.17 \text{ m}. \tag{21}$$

Quesito 2.3 Per calcolare la velocitá di m_2 quando tocca terra possiamo usare il teorema delle forze vive; poiché sul sistema agisce la forza di attrito dinamico fra m_1 ed il blocco si ha che $\Delta E = E_f - E_i = L_{D,tot}$, dove

$$L_{D,tot} = -F_D \Delta x_1 - F_D \Delta x \tag{22}$$

$\Delta x_1 = L - x$, Δx sono gli spostamenti di m_1 e del cubo rispetto alsuolo e $F_D = \mu_D m_1 g$. Si avrá dunque

$$E_f - E_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \frac{1}{2}MV^2 - m_2 g L = -\mu_D m_1 g(\Delta x_1 + \Delta x). \tag{23}$$

La 23 per essere risolta richiede la conoscenza della velocitá del blocco che peró puó essere facilmente calcolata usando nuovamente la conservazione della quantitá di moto in direzione longitudinale; infatti, poiché all'inizio il sistema é fermo e $p_{i,x} = p_{f,x}$ si ha

$$m_1 v_f + MV = 0 \tag{24}$$

che ci permette di ricavare V in funzione di v_f. Sostituendo l'espressione cosí ottenuta nella 23 la stessa diventa

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{M})v_f^2 - m_2 g L = -\mu_D m_1 g(\Delta x_1 + \Delta x) \tag{25}$$

da cui si puó finalmente ricavare v_f

$$v_f = \sqrt{2\frac{m_2 g L - \mu_D m_1 g L}{m_1 + m_2 + m_1^2/M}} = 0.86 \text{ m/s}. \tag{26}$$