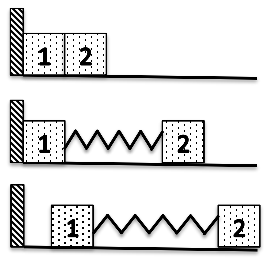
Cognome | *Nome* | *Numero di matricola*

Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Civile (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 11/01/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente sui fogli forniti
- Modalità di risposta: scrivere la formula parametrica della risposta nello spazio grande e la risposta numerica nello spazio piccolo. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:



Due blocchetti di uguale massa $m = 0.35\,\mathrm{kg}$ sono collegati da una molla di costante elastica $k = 4.5\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $L_0 = 0.25\,\mathrm{m}$ e possono scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Inizialmente il blocchetto 1 è appoggiato ad una parete verticale ed il blocchetto 2 è tenuto premuto contro il blocchetto 1 in modo che la molla sia completamente compressa. All'istante $t = 0$ i blocchetti vengono lasciati liberi di muoversi. Si possono considerare i blocchetti come punti materiali.

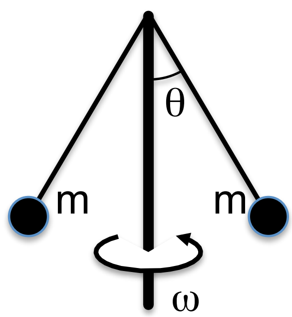
Quesito 1.1 Trovare la velocità del blocchetto 2 nel momento in cui il blocchetto 1 si stacca dalla parete.

Quesito 1.2 Trovare la velocità del centro di massa del sistema dei due blocchetti in funzione del tempo dopo che i blocchetti si sono staccati dalla parete. Calcolarla numericamente nell'istante in cui il blocchetto 1 si stacca dalla parete.

Quesito 1.3 Calcolare la massima distanza tra i due blocchetti dopo che si sono staccati dalla parete.

Problema 2:

Un sistema per misurare la velocità angolare è costituito da un'asta verticale a cui sono sospese due masse identiche $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ attraverso due astine rigide prive di massa di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$. Misurando l'angolo θ che le due astine formano rispetto alla verticale si puó determinare la velocità angolare di rotazione dell'asta.

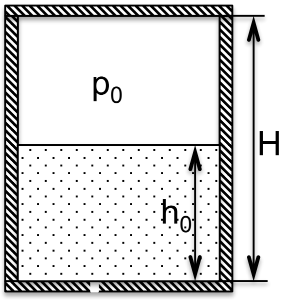


Quesito 2.1 Determinare la relazione tra la velocità angolare ω dell'asta e l'angolo formato dalle astine con la verticale trascurando tutte le forze di attrito. Si determini numericamente la minima velocità angolare ω_0 per cui le astine si sollevano.

Quesito 2.2 Si consideri adesso che le due masse m siano soggette ad una forza di attrito viscoso proporzionale alla loro velocità: $\vec{F}_V = -\beta\vec{v}$ con $\beta = 3.0\,\mathrm{kg/s}$. Supponendo che l'asta venga mantenuta in rotazione da un motore con una velocità angolare doppia rispetto alla minima velocità calcolata al punto precedente ($\omega_1 = 2\omega_0$), calcolare la potenza fornita dal motore per vincere l'attrito viscoso.

Quesito 2.3 Improvvisamente il motore si spegne ed il sistema comincia a rallentare a causa dell'attrito viscoso. Calcolare la componente verticale L_z del momento angolare del sistema rispetto al punto di sospensione delle sbarrette all'istante in cui il motore si spegne. Utilizzando la seconda equazione cardinale, calcolare dopo quanto tempo L_z si è ridotto del 10%.

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)



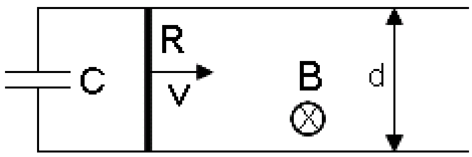
Problema 3:
Un serbatoio cilindrico di altezza $H = 10.0\,\mathrm{m}$ e raggio $r = 50$ cm è sigillato ed isolato termicamente dall'esterno. Sul fondo ha un piccolo forellino di sezione molto minore dell'area della base del cilindro che si apre sull'atmosfera. Inizialmente il serbatoio è pieno fino ad un altezza $h_0 = H/2$ di acqua, mentre la parte superiore contiene aria ad una pressione $p_0 = 2.0\,\mathrm{atm}$. (Si consideri $1\,\mathrm{atm} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ e $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$)

Quesito 3.1 Calcolare la velocità di uscita dell'acqua dal forellino nella situazione iniziale.

Quesito 3.2 Il recipiente si svuota lentamente. Calcolare la velocità di uscita quando il livello dell'acqua è la metà di quello inziale, $h_1 = H/4$. Poichè la capacità termica dell'acqua è molto maggiore di quella del gas, si può considerare costante la temperatura, che non è nota esattamente, ma è dell'ordine della temperatura ambiente.

Quesito 3.3 Calcolare il calore assorbito dal gas tra il momento in cui l'acqua si trova ad altezza h_0 a quando si trova ad h_1, sempre assumendo temperatura costante.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)



Problema 4:
Una sbarretta conduttrice di resistenza $R = 2.5\ k\Omega$ si muove con velocità costante $v = 4.5$ m/s scivolando senza attrito su due guide conduttrici poste a distanza $d = 25$ cm, ai capi delle quali è collegato un condensatore di capacità $C = 30\mu$F inizialmente scarico. Tra le due guide è presente un campo magnetico costante ed uniforme $B = 0.85$ T diretto in verso entrante perpendicolarmente al piano delle due guide.

Quesito 4.1 Calcolare la forza elettromotrice indotta nel circuito, indicando il segno + se il polo positivo è in alto ed il segno − se è in basso.

Quesito 4.2 Esprimere la carica Q che si deposita sul condensatore in funzione del tempo ed in particolare calcolarla dopo un tempo $t = 150\,\mathrm{ms}$.

Quesito 4.3 Esprimere in funzione del tempo la potenza esercitata dall'operatore per mantenere la sbarretta in movimento e calcolarla numericamente per $t = 150\,\mathrm{ms}$.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Nel moto dei blocchetti l'energia si conserva, in quanto non vi sono forze non conservative. Il blocchetto 1 si stacca dalla parete nel momento in cui la forza esercitata dalla molla è nulla, cioè nel momento in cui la lunghezza della molla supera la lunghezza di riposo. Utilizzando la conservazione dell'energia tra il momento iniziale ed il momento del distacco si ottiene:

$$\frac{1}{2}k(0-L_0)^2 = \frac{1}{2}k(L_0-L_0)^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = L_0\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.90\,\mathrm{m/s} \tag{1}$$

Quesito 1.2 Successivamente al distacco dalla parete non vi sono forze esterne lungo la direzione orizzontale. Di conseguenza il centro di massa si muoverà di moto rettilineo uniforme con velocità costante. La velocità di ottiene applicando la definizione all'istante del distacco dalla parete:

$$v_{CM} = \frac{mv_1 + mv_2}{2m} = \frac{v_2}{2} = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.45\,\mathrm{m/s} \tag{2}$$

Quesito 1.3 Nel moto successivo al distacco le due masse oscilleranno. Da notare che nell'istante iniziale la massa 1 è ferma, mentre la massa 2 è in movimento, per cui le due masse avranno in generale velocità diverse. Questo significa che la condizione di massimo allungamento *non* corrisponde alla condizione in cui entrambi le masse sono ferme nel sistema del pavimento (che non si verifica mai). Se però ci mettiamo nel sistema del centro di massa, che è inerziale in quanto si muove di moto rettilineo uniforme, le velocità delle due masse dovranno essere sempre uguali in modulo ed opposte in verso, per cui la condizione di massima (e minima) lunghezza della molla corrisponde effettivamente alla condizione di velocità nulla per entrambi i blocchetti. Mettendoci perciò nel sistema del centro di massa, le velocità iniziali saranno:

$$v_1' = 0 - v_{CM} = -v_{CM} = -0.45\,\mathrm{m/s} \qquad ; \qquad v_2' = v_2 - v_{CM} = v_{CM} = +0.45\,\mathrm{m/s} \tag{3}$$

Applicando la conservazione dell'energia dall'istante del distacco a quello di massima lunghezza L della molla si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}k(L_0-L_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(L-L_0)^2. \tag{4}$$

Sostituendo le espressioni ricavate sopra si ottiene:

$$mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}k(L-L_0)^2 \quad \Longrightarrow \quad L = L_0 \pm v_{CM}\sqrt{\frac{2m}{k}} = L_0 \pm \frac{L_0}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

Il segno piú corrisponde alla massima lunghezza, $L_{MAX} = (1+1/\sqrt{2})L_0 = 0.43\,\mathrm{m}$, mentre il segno meno corrisponde alla lunghezza minima $L_{MIN} = (1-1/\sqrt{2})L_0 = 0.073\,\mathrm{m}$. Si noti che anche se la lunghezza iniziale della molla è nulla, questa condizione non viene mai più raggiunta, perchè una parte dell'energia potenziale della molla è andata nell'energia cinetica del moto traslazionale del sistema nel suo complesso, che rimane costante.

Problema 2:

Quesito 2.1 Detta F la forza esercitata dalla sbarretta su ciascuna massa m, e, proiettando l'equazione di Newton lungo la direzione orizzontale e verticale, si ottiene:

$$F\cos\theta - mg = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\theta = mg/F \tag{6}$$

$$F\sin\theta = m\omega^2\ell\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad F = m\omega^2\ell \tag{7}$$

da cui $\cos\theta = g/(\ell\omega^2) = \omega_0^2/\omega^2$. Essendo $\cos\theta \le 1$ si ha che deve essere $\omega^2 \ge g/\ell = \omega_0^2$, con $\omega_0 = \sqrt{g/\ell} = 7.0\,\mathrm{rad/s}$.

Quesito 2.2 Il modulo della forza di attrito su ciascuna massa è $F_V = \beta v = \beta\ell\omega\sin\theta$. La componente del momento lungo l'asse di rotazione sarà, considerando una rotazione antioraria, e che la forza di attrito è sempre opposta alla velocità,

$$\tau_z = -2F_V\ell\sin\theta = -2\beta\ell^2\omega_1\sin^2\theta = -2\beta\ell^2\omega_1\left(1-\frac{\omega_0^4}{\omega_1^4}\right) \tag{8}$$

La potenza W erogata dal motore è quindi $W = |\tau_z|\omega_1$

$$W = 2\beta\ell^2\omega_1^2\left(1-\frac{\omega_0^4}{\omega_1^4}\right) = \frac{15}{2}\beta\ell^2\omega_0^2 = \frac{15}{2}\beta\ell g = 44.1\,\mathrm{W} \tag{9}$$

Quesito 2.3 La componente z del momento angolare del sistema è $L_z = 2mv\ell \sin\theta = 2m\ell^2 \sin^2\theta\omega$. Al momento in cui si spegne il motore si ha $\omega = \omega_1 = 2\omega_0$ da cui

$$L_z = 2m\ell^2 2\omega_0 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{g\ell^3} = 0.26\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \tag{10}$$

Confrontando con la (8) si vede che $\tau = -\frac{\beta}{m}L_z$. Utilizzando la seconda equazione cardinale lungo l'asse z si ottiene:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = -\frac{\beta}{m}L_z \tag{11}$$

Questa equazione differenziale è ben nota ed ha come soluzione un'esponenziale decrescente con costante tempo $t_0 = m/\beta = 0.083\,\mathrm{s}$.

$$L_z(t) = L_z(0)e^{-\frac{t}{t_0}} \tag{12}$$

Imponendo che $L_z(t) = 0.90 L_z(0)$ si ottiene

$$0.90 = e^{-\frac{t}{t_0}} \quad \Longrightarrow \quad t = -t_0 \ln(0.9) = 8.74\,\mathrm{ms} \tag{13}$$

Problema 3:

Quesito 3.1 Applicando il teorema di Bernoulli tra un punto sulla superficie del liquido (che si può considerare ferma in quanto di sezione molto più grande del forellino) e un punto all'uscita del forellino si ottiene:

$$p_0 + \rho g h_0 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0 - p_{atm} + \rho g h_0\right)} = 17.3\,\mathrm{m/s} \tag{14}$$

Quesito 3.2 Nello svuotarsi, il volume del gas aumenta, e trattandosi di un isoterma la pressione diminuisce conseguentemente: $p_1 = p_0(V_0/V_1) = p_0(H - h_0)/(H - h_1) = 2p_0/3$ Applicando di nuovo il teorema di Bernoulli tra gli stessi due punti si ottiene:

$$p_1 + \rho g h_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_{atm} + \rho g h_1\right)} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_{atm}/3 + \rho g H/4\right)} = 10.8\,\mathrm{m/s} \tag{15}$$

Quesito 3.3 Assumendo che la trasformazione sia isoterma, possiamo calcolare quanto calore il gas ha assorbito dall'acqua. Poiché $\Delta U = 0$ si ha che $Q = \int PdV$ e quindi, chiamando $A = \pi r^2 = 0.785\,\mathrm{m}^2$ la sezione del cilindro ed utilizzando la legge dei gas perfetti si ottiene:

$$Q = nRT_0 \ln\frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \ln\frac{H - h_1}{H - h_0} = p_0 A (H/2) \ln\frac{3}{2} = 3.18 \times 10^5\,\mathrm{J}. \tag{16}$$

Problema 4:

Quesito 4.1 La forza elettromotrice indotta é data dalla variazione di flusso del campo magnetico $V_{ind} = -d\Phi/dt$. Usando le prescrizioni canoniche per il segno del campo magnetico e della differenza di potenziale il flusso attraverso una porzione di circuito di lato x é dato da $\Phi = -Bdx$, pertanto si ottiene

$$V_{ind} = Bvd = 0.956 \text{ V} \tag{17}$$

ovvero la corrente indotta ha verso antiorario.

Quesito 4.2 Si tratta della carica di un condensatore attraverso una resistenza con costante di tempo $\tau = RC = 75$ ms. Si ha quindi

$$Q(t) = Q_{max}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{18}$$

con $Q_{max} = CV_{ind} = 28.7\mu\mathrm{C}$ e ponendo $t = 150$ ms si ottiene pertanto

$$Q = Q_{max}(1 - e^{-2}) = 24.8 \ \mu \text{ C}. \tag{19}$$

Quesito 4.3 La forza magnetica è data da $\vec{F} = I_{ind}\vec{d} \times \vec{B}$. Poiché $\vec{d}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali l'espressione precedente si riduce a $F = I_{ind}dB$; usando quindi la definizione di potenza $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ si ha

$$P = I_{ind}dBv = I_{ind}V_{ind} \tag{20}$$

e la corrente indotta puó essere facilmente calcolata usando l'espressione ricavata al quesito precedente

$$I_{ind} = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_{max}}{\tau}e^{-t/\tau} \tag{21}$$

da cui, finalmente

$$P(t) = V_{ind}\frac{Q_{max}}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{V_{ind}^2}{R}e^{-t/\tau} \tag{22}$$

e per $t = 150$ ms

$$P = 49.5\,\mu\mathrm{W}. \tag{23}$$