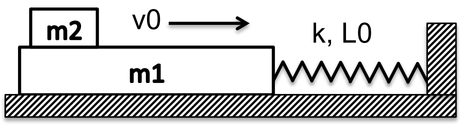
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Civile (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 31/01/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: spiegare il procedimento seguito, determinare la risposta richiesta sulla base dei parametri del problema, ed infine valutarla numericamente. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Un carrello di massa $m_1 = 9\,\mathrm{kg}$ si può muovere senza attrito su un piano orizzontale. Sul carrello è appoggiata una massa $m_2 = m_1/3$. Il coefficiente di attrito statico tra le due masse è $\mu_S = 0.6$. Le due masse sono inizialmente in moto con una velocità $v_0 = 2.5\,\mathrm{m/s}$ e vanno a comprimere una molla di costante elastica $k = 200\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $L_0 = 70\,\mathrm{cm}$.

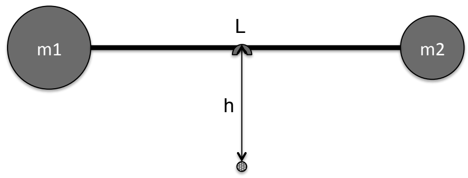


Quesito 1.1 Determinare per quale valore x_1 della compressione della molla la massa m_2 inizierà a scivolare sul carrello.

Quesito 1.2 Determinare la velocità delle due masse quando la massa m_2 inizia a scivolare

Quesito 1.3 Variando adesso la velocità iniziale v_0, determinare la minima velocità $v_{0,MIN}$ per cui avviene lo scivolamento di m_2 sul carrello.

Problema 2:
Due masse puntiformi $m_1 = 5.0\,\mathrm{kg}$ ed $m_2 = m_1/2$ sono collegate con una sbarretta sottile priva di massa di lunghezza $L = 25\,\mathrm{cm}$. Il sistema viene inizialmente tenuto con la sbarretta orizzontale sopra un piolo che si trova sulla vertical del centro geometrico della sbarretta. ad un altezza $h = L/2$ Il sistema viene lasciato cadere da fermo, sotto l'azione della gravità. Colpendo il piolo la sbarretta si aggancia al piolo ed inizia a ruotare intorno ad esso senza attrito.



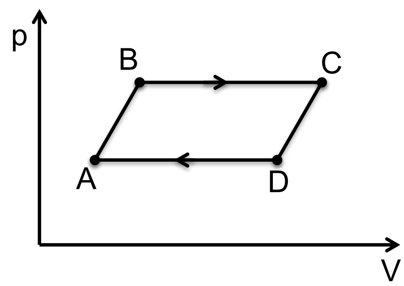
Quesito 2.1 Calcolare la velocità angolare ω_0 della sbarretta subito dopo che si è agganciata al piolo.

Quesito 2.2 Calcolare la velocità angolare ω_1 della sbarretta quando la massa m_1 si trova sulla verticale del piolo e sotto di esso.

Quesito 2.3 Determinare il modulo, direzione e verso della forza esercitata dal piolo sulla sbarretta quando essa si trova nella posizione del punto 2.

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)

Problema 3:
Un gas perfetto monoatomico compie il ciclo $ABCD$ reversibile e quasistatico con: $A = (V_0, p_0); B = (2V_0, 2p_0); C = (5V_0, 2p_0), D = (4V_0, p_0)$. Tutte le trasformazioni sono rappresentate da rette nel piano pV. Le condizioni del punto A sono: $V_0 = 1.5\,\mathrm{dm^3}; p_0 = 2.5\,\mathrm{atm}; T_A = 200\,\mathrm{K}$.



Quesito 3.1 Dire in quali tratti il gas assorbe calore, e calcolare il calore assorbito dal gas dall'ambiente durante il ciclo.

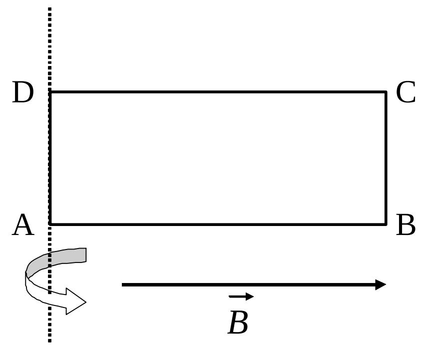
Quesito 3.2 Calcolare il rendimento η di una macchina termica che utilizzi il ciclo $ABCD$

Quesito 3.3 Calcolare la variazione di entropia del gas ΔS_{BD} tra il punto B ed il punto D.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Una spira rettangolare di lati AB=15 cm e BC=4.5 cm e resistenza $R = 1.5\Omega$ ruota con velocità angolare $\omega = 35\,\mathrm{rad/s}$ intorno all'asse passante per il lato AD, in senso antiorario. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $B = 0.65\,\mathrm{T}$ perpendicolare all'asse di rotazione. Al tempo $t = 0$ la spira si trova nel piano del campo magnetico.



Quesito 4.1 Calcolare la forza elettromotrice indotta in funzione del tempo, e determinarla numericamente per t=0.

Quesito 4.2 Calcolare, in funzione del tempo, il momento della forza esercitato dall'operatore esterno per mantenere in rotazione la spira a velocità angolare costante e determinarlo numericamente per t=0.

Quesito 4.3 Calcolare quanta energia viene dissipata nella spira in un periodo di rotazione.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Detta F_S la forza di attrito statico esercitata su m_2, la sua accelerazione sarà: $a_2 = F_S/m_2 \leq \mu_s g$. Finché non vi è scivolamento sarà $a_1 = a_2 = a = F_{\text{molla}}/(m_1 + m_2) = (kx/(m_1 + m_2))$, da cui

$$x \leq \frac{m_1 + m_2}{k}\mu_S g = x_1 = 35.3\,\text{cm} \tag{1}$$

Quesito 1.2 Nel moto del carrello contro la molla si conserva l'energia, in quanto la forza della molla è conservativa e l attrito statico non compie lavoro. Per cui

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \tag{2}$$

da cui si ricava

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m_1 + m_2}x_1^2} = \sqrt{v_0^2 - \frac{m_1 + m_2}{k}\mu_S^2 g^2} = 2.04\,\text{m/s} \tag{3}$$

Quesito 1.3 Perchè avvenga lo scivolamento, è necessario che la compressione x_1 sia inferiore all'ampiezza del moto oscillatorio. In questo modo la forza esercitata dalla molla rimarrà sempre inferiore alla massima forza di attrito esercitabile su m_2. L'ampiezza dell'oscillazione è $A = v_0/\omega = v_0\sqrt{(m_1 + m_2)/k}$. Si ha quindi

$$x_1 \leq v_0\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{m_1 + m_2}{k}\mu_S g \leq v_0\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \Longrightarrow \quad v_0 \geq \mu_S g\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 1.44\,\text{m/s} \tag{4}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Nell'urto della sbarretta contro il piolo non si conserva la quantità di moto in quanto il piolo esercita una forza esterna sulla sbarretta. Si conserva invece il momento angolare rispetto al piolo perchè il momento di tale forza rispetto al piolo è nullo. Le due masse cadono sotto l'azione della gravità e subito prima dell'urto hanno una velocità pari a $\sqrt{2gh} = \sqrt{gL}$. Considerando che il momento di inerzia del sistema rispetto al centro della sbarretta è $I_0 = (m_1 + m_2)(L/2)^2$ e imponendo la conservazione del momento angolare si ottiene:

$$(m_1 - m_2)\frac{L}{2}\sqrt{gL} = I_0\omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{gL}}{(m_1 + m_2)(L/2)} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{L}} = 4.18\,\text{rad/s} \tag{5}$$

Quesito 2.2 Nel moto successivo si conserva l'energia in quanto la gravità è conservativa e la forza del piolo non compie lavoro. Quindi

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 + m_2\frac{L}{2}g - m_1\frac{L}{2}g \tag{6}$$

da cui, sostituendo i valori trovati in precedenza

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(m_1 - m_2)(L/2)g}{(1/2)(m_1 + m_2)(L/2)^2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{g}{L}} = 8.35\,\text{rad/s} \tag{7}$$

Quesito 2.3 La risultante delle forze dovrà essere uguale alla forza centripeta. Detta R_y la reazione verticale del piolo (quella orizzontale è nulla) si ha

$$R_y - m_1 g - m_2 g = (m_1\omega_1^2\frac{L}{2} - m_2\omega_1^2\frac{L}{2}) \quad \Longrightarrow \quad R_y = (m_1 - m_2)\omega_1^2\frac{L}{2} + (m_1 + m_2)g = \frac{35}{18}m_1 g = 95.35\,\text{N} \tag{8}$$

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)

Problema 3:

Quesito 3.1 Il gas assorbe calore nei tratti AB e BC in quanto in entrambi aumenta la temperatura ed il volume, per cui $dQ = dU + pdV$ sarà positivo. Cede invece calore in CD e DA. Nel tratto AB si ha

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = nc_V(T_B - T_A) + V_0(p_0 + \frac{1}{2}p_0) = nc_V\frac{4p_0V_0 - p_0V_0}{nR} + \frac{3}{2}p_0V_0 = 6p_0V_0 = 2272\,\mathrm{J} \tag{9}$$

dove si è calcolato il lavoro dall'area sotto il segmento AB. Nel tratto BC la pressione è costante per cui

$$Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) = nc_P\frac{10p_0V_0 - 4p_0V_0}{nR} = 15p_0V_0 = 5681\,\mathrm{J} \tag{10}$$

Il calore assorbito totale sarà quindi

$$Q_{ASS} = Q_{AB} + Q_{BC} = \left(6\frac{c_P}{R} + 3\frac{c_V}{R} + \frac{3}{2}\right)p_0V_0 = \left(9\frac{c_V}{R} + \frac{15}{2}\right)p_0V_0 = 21p_0V_0 = 7954\,\mathrm{J} \tag{11}$$

Quesito 3.2 Il rendimento è definito da $\eta = W/Q_{ASS}$. Il lavoro totale è l'area del parallelogramma $ABCD$:

$$\eta = \frac{(4V_0 - V_0)(2p_0 - p_0)}{21p_0V_0} = \frac{3}{21} = 14.3\% \tag{12}$$

Quesito 3.3 La variazione di entropia si puó calcolare osservando che $T_B = T_D$. Si puó quindi considerare una trasformazione isoterma che congiunge i due punti:

$$\Delta S_{BD} = \int_B^D \frac{dQ}{T} = \int_{V_B}^{V_D}\frac{pdV}{T} = \int_{V_B}^{V_D}\frac{nRdV}{V} = nR\ln\frac{V_D}{V_B} = \frac{p_0V_0}{T_A}\ln 2 = 1.31\,\mathrm{J/k} \tag{13}$$

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Quesito 4.1 Attraverso spira si ha un flusso del campo magnetico che varia con l'angolo che questa forma con campo. Prendendo il versore dell'area della spira uscente dal foglio nella posizione inziale, l'angolo tra la spira ed il campo magnetico in funzione del tempo, vale $\theta = \omega t - \pi/2$. Chiamati $a = \overline{AB}$ e $b = \overline{BC}$ le lunghezze dei due lati della spira, si ha che il flusso vale: $\Phi = abBcos(\theta) = abBcos(\omega t - \pi/2)$ La forza elettromotrice indotta è data da:

$$V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = ab\omega B\sin(\omega t - \pi/2) \tag{14}$$

Per $t = 0$ si ha $V_{ind} = -ab\omega B = -154\,\mathrm{mV}$

Quesito 4.2 $I_{\text{ind}}(t) = V_{\text{ind}}(t)/R = ab\omega B\sin(\omega t - \pi/2)/R$. Poiché la spira ruota con velocità angolare costante, l'operatore applica un momento della forza sulla spira uguale ed opposto a quello indotto dal campo magnetico, $\vec{\tau}_{\text{op}} = -\vec{\tau}_{\text{ind}}$, con $\vec{\tau}_{\text{ind}} = \vec{\mu}\times\vec{B} = -I_{\text{ind}}(t)abB\sin(\omega t - \pi/2)\hat{z}$, avendo indicato con $\hat{z}$ il versore diretto verso l'alto lungo l'asse di rotazione. Si ottiene quindi

$$\vec{\tau}_{\text{op}} = \frac{(abB)^2\omega\sin^2(\omega t - \pi/2)}{R}\hat{z} \tag{15}$$

Al tempo $t = 0$ vale $\tau_{\text{op}} = (abB)^2\omega/R = 4.5\times 10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m}$

Quesito 4.3 La potenza dissipata in funzione del tempo può essere calcolata in due modi diversi: $P = I^2R = \tau\omega$. In entrambi i casi si ottiene:

$$P(t) = \frac{(abB)^2\omega^2\sin^2(\omega t - \pi/2)}{R} \tag{16}$$

. L'energia è l'integrale della potenza: $E = \int_0^T P(t)dt$. L'unico termine che dipende dal tempo è il $\sin^2(\omega t)$ il cui integrale su un periodo dà:

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \int_0^T \frac{1 - cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \tag{17}$$

da cui

$$E = \int_0^T \frac{(abB)^2\omega^2\sin^2(\omega t - \pi/2)}{R}dt = \frac{(abB)^2\pi\omega}{R} = 1.4\,\mathrm{mJ} \tag{18}$$