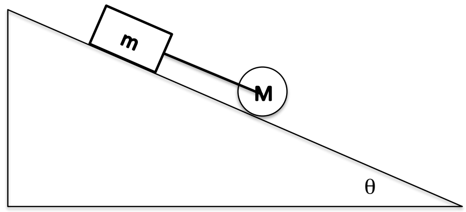
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Civile (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 14/02/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: scrivere la formula parametrica della risposta nello spazio grande e la risposta numerica nello spazio piccolo. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Un cilindro di massa $M = 10.2\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.18\,\mathrm{m}$ rotola senza strisciare su un piano inclinato di $\pi/6$ rispetto all' orizzontale. Al centro del cilindro è attaccata una corda che trascina un blocco di massa $m = 2.6\,\mathrm{kg}$. La corda è di massa trascurabile e, in tensione, parallela al piano inclinato. Il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e piano inclinato sia $\mu_d = 0.8$.

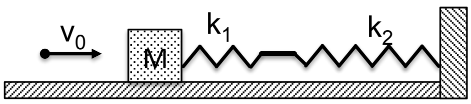


Quesito 1.1 Determinare l'accelerazione del cilindro.

Quesito 1.2 Calcolare la tensione della fune.

Quesito 1.3 Trovare la velocitá angolare del cilindro dopo che, partendo da fermo, ha percorso un tratto $d = 2$ m lungo il piano inclinato.

Problema 2:
Un blocco di massa $M = 10.5$ Kg poggia su un piano orizzontale liscio. Il blocco è collegato ad una parete verticale attraverso due molle unite una di seguito all'altra. Le molle hanno rispettivamente costante elastica $k_1 = 1150\,\mathrm{N/m}$ e $k_2 = 820\,\mathrm{N/m}$ e lunghezze a riposo $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ e $l_2 = 2\,\mathrm{m}$. All'istante $t = 0$ il blocco si trova in quiete a distanza $l_1 + l_2$ dalla parete. In questo istante un proiettile di massa $m = 0.1$ Kg e velocitá $v_0 = 298$ m/s colpisce il blocco nella direzione di compressione delle molle e si conficca in esso.



Quesito 2.1 Trovare la velocità massima del blocco nel moto successivo al conficcamento del proiettile.

Quesito 2.2 Trovare lo spostamento massimo del blocco rispetto alla posizione iniziale.

Quesito 2.3 Calcolare la frequenza di oscillazione del blocco nel moto successivo.

Problema 3:
Una corda omogenea di lunghezza $L = 4.0\,\mathrm{m}$ e massa $M = 800\,\mathrm{g}$ è tesa tra un oscillatore meccanico ed una molla di costante elastica $k_M = 1000\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo nulla. La corda viene tesa in modo che la lunghezza della molla sia $x_M = 50\,\mathrm{cm}$. L'oscillatore impartisce alla corda vibrazioni trasversali sinusoidali di frequenza $f = 100\,\mathrm{Hz}$ ed è in funzione da un tempo sufficientemente lungo per cui l'intera lunghezza della corda è interessata dalle vibrazioni. Si consideri che la molla assorba completamente l'onda che la colpisce e che non vi sia nessuna riflessione.

Quesito 3.1 Calcolare la velocità di propagazione dell'onda sulla corda.

Quesito 3.2 Considerando che per $t = 0$ l'oscillatore abbia spostamento nullo calcolare la minima distanze dall'oscillatore per cui lo spostamento della corda è nullo a $t = t_0 = 15\,\mathrm{ms}$.

Quesito 3.3 Calcolare l'ampiezza di oscillazione se la potenza erogata dall'oscillatore meccanico è pari a $W = 15\,\mathrm{W}$.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Prendiamo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano e asse y ortogonale al precedente e orientato verso l'alto e scriviamo le equazione cardinali per il cilindro ed il blocco; per il cilindro si ha

$$\begin{aligned} Ma_x &= Mg\sin\theta - T - F_S \\ Ma_y &= -Mg\cos\theta + N_C = 0 \\ I\alpha &= -MgR\sin\theta + TR \end{aligned} \tag{1}$$

($I = MR^2/2 + MR^2$) mentre per il blocco otteniamo

$$\begin{aligned} ma_x &= mg\sin\theta + T - F_D \\ ma_y &= -mg\cos\theta + N_B = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla seconda delle 2 si ottiene

$$F_D = \mu_d mg\cos\theta \tag{3}$$

e, osservando che si tratta di un moto di puro rotolamento, e che quindi, con le convezioni scelte, si ha

$$\alpha R = -a_x \tag{4}$$

si puó ricavare a_x usando l'ultima delle (1) e la prima delle (2), ovvero

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}MRa_x &= -MgR\sin\theta + TR \\ ma_x &= mg\sin\theta + T - \mu_d mg\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

da cui, eliminando T, si ricava facilmente

$$a_x = \frac{2g}{2m+3M}((m+M)\sin\theta - \mu_d m\cos\theta) = 2.52\ \text{m}/s^2 \tag{6}$$

Quesito 1.2 Sfruttando il risultato precedente per l'accelerazione, dalla prima delle (5), si ottiene subito

$$T = \frac{mMg}{2m+3M}(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta) = 11.46\ \text{N} \tag{7}$$

Quesito 1.3 Per calcolare la velocitá angolare del cilindro possiamo utilizzare il teorema delle forze vive; avremo quindi che la variazione di energia cinetica del sistema coincide con la somma dei lavori di tutte le forze agenti sul sistema, ovvero

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = (m+M)gd\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta d \tag{8}$$

e osservando che si tratta di un moto di puro rotolamento e che $v_c = v_b$

$$\frac{1}{2}(m + \frac{3}{2}M)\omega^2R^2 = ((m+M)\sin\theta - \mu_d m\cos\theta)gd \tag{9}$$

da cui

$$\omega = -\frac{2}{R}\sqrt{\frac{(m+M)gd\sin\theta - \mu_d mgd\cos\theta}{2m+3M}} = 17.63\ \text{rad/s} \tag{10}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Il blocco avrà la massima velocità nell'istante immediatamente successivo a quello in cui il proiettile si è conficcato nello stesso, in quanto successivamente viene decelerato dal sistema di molle. Per calcolare tale velocitá si puó sfruttare la conservazione della quantitá di moto in quanto sul sistema blocco+proiettile non agiscono forze esterne impulsive in direzione orizzontale. Si ricava quindi facilmente

$$mv_0 = (m+M)v_f \quad \Longrightarrow \quad v_f = v_0\frac{m}{m+M} = 2.81\,\text{m/s}. \tag{11}$$

Quesito 2.2 Per calcolare il massimo scostamento dalla posizione di equilibrio possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica del sistema massa piú proiettile nel moto successivo all'urto. Schematizzando il sistema delle due molle come una molla di costante elastica k avremo quindi

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2. \tag{12}$$

Rimane dunque da calcolare la costante elastica equivalente del sistema di due molle; ció puó essere fatto immaginando di applicare una forza esterna F alle molle e osservando che istante per istante devono valere le seguenti relazioni, dove le x sono gli allungamenti delle molle (non le loro lunghezze complessive)

$$\begin{aligned} -k_1 x_1 &= F \\ -k_2 x_2 &= F \\ -kx &= F \end{aligned} \tag{13}$$

Poiché l'allungamento totale è uguale alla somma degli allungamenti si avrà:

$$-\frac{F}{k} = x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{14}$$

da cui si ricava

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 478.7\,\mathrm{N/m} \tag{15}$$

che inserita nella (12) dà $x_{max} = v_f\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 41.8\,\mathrm{cm}$

Quesito 2.3 Dato che il sistema delle due molle é equivalente in tutto e per tutto ad una molla di lunghezza a riposo $l_1 + l_2$ e costante elastica k come calcolata al punto precedente, avremo che

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+M}} = 1.07\,\mathrm{Hz} \tag{16}$$

Problema 3:

Quesito 3.1 La velocità di un'onda trasversale su una corda tesa è $\sqrt{T/\mu}$ dove T è la tensione e μ la densità lineare di massa della corda. La tensione è dovuta alla molla $T = k_M x_M = 500\,\mathrm{N}$. La densità lineare è $\mu = M/L = 0.2\,\mathrm{kg/m}$, da cui $v = 50\,\mathrm{m/s}$.

Quesito 3.2 L'equazione d'onda è data da $y = A\sin(\omega t - kx)$ dove $\omega = 2\pi f$ e $k = \omega/v$. Il segno meno indica che l'onda si propaga verso destra. Alla posizione dell'oscillatore ($x = 0$) lo spostamento a $t = 0$ è nullo come richiesto. Se nel punto x c'è spostamento nullo per $t = t_0$ sarà $A\sin(\omega t_0 - kx) = 0$ cioè $\omega t_0 - kx = n\pi$ con n intero relativo, da cui

$$x = \frac{\omega}{k}t_0 - \frac{n\pi}{k} = vt_0 - n\frac{\lambda}{2} \tag{17}$$

dove $\lambda = 2\pi/k = v/f = 0.50\,\mathrm{m}$ è la lunghezza d'onda. Poiché$vt_0 = 75\,\mathrm{cm}$, si ha che per $n = 3$ la distanza minima è $x = 0$. Il successivo punto è $x = 25\,\mathrm{cm}$. Se invece fosse stato $t_0 = 8\,\mathrm{ms}$ (come era nelle intenzioni), si sarebbe ottenuto il minimo valore positivo di x per $n = 1$, con $x = 40\,\mathrm{cm} - 25\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}$

Quesito 3.3 La potenza è data da $P = \frac{1}{2}\mu v(\omega A)^2$ dove A è l'ampiezza. Si ottiene quindi

$$A = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2P}{\mu v}} = 2.76\,\mathrm{mm} \tag{18}$$