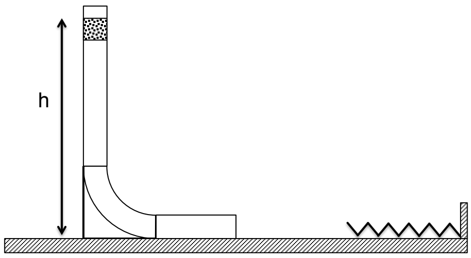
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 6/6/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: scrivere la formula parametrica della risposta nello spazio grande e la risposta numerica nello spazio piccolo. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Un blocchetto di massa $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ può scendere all'interno di un tubo liscio piegato ad L di massa $m_2 = 5m_1$ appoggiato su di un piano orizzontale lungo il quale si può muovere senza attrito. Sullo stesso piano, dal lato in cui il cui blocchetto fuoriesce dal tubo, è fissata una molla di costante elastica $k = 0.12\,\mathrm{kN/m}$ e lunghezza a riposo L_0. Inizialmente tutte le masse sono in quiete e la massa m_1 viene lasciata cadere nel tubo da un'altezza $h = 80\,\mathrm{cm}$.

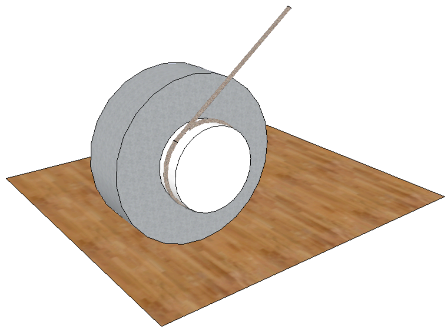


Quesito 1.1 Trovare la velocità con cui il blocchetto m_1 fuoriesce dal tubo.

Quesito 1.2 Il blocchetto comprime la molla. Determinare la massima compressione della molla e quanto tempo intercorre tra quando il blocchetto tocca la molla a quando raggiunge la massima compressione.

Quesito 1.3 Successivamente il blocchetto, spinto dalla molla si muoverà nella stessa direzione del tubo. Dire se riuscirà a raggiungere il tubo ed in caso affermativo determinare che altezza raggiungerà all'interno del tratto verticale del tubo.

Problema 2:
Un cilindro omogeneo di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ e massa $M = 5\,\mathrm{kg}$ appoggiato su un piano orizzontale viene accelerato da una forza $F = Mg$ applicata ad un una fune avvolta attorno ad un tamburo di raggio $b = R/2$ solidale e coassiale con il cilindro. Il tamburo ha massa trascurabile. La fune forma un angolo $\theta = 45°$ con il piano orizzontale. Il coefficiente di attrito statico tra il cilindro ed il piano è sufficiente perché il cilindro rotoli senza strisciare.



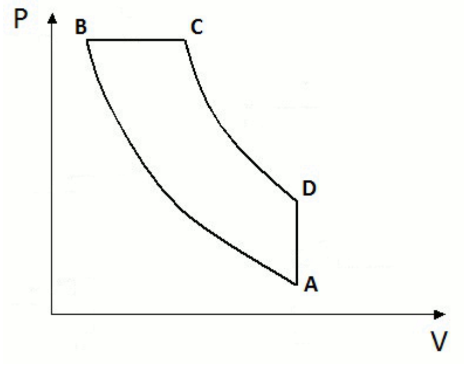
Quesito 2.1 Determinare l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del cilindro.

Quesito 2.2 Determinare modulo e verso della forza di attrito F_S esercitata dal pavimento sul cilindro.

Quesito 2.3 Determinare il minimo coefficiente di attrito μ_s per cui il cilindro rotola senza strisciare.

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)

Problema 3:
Il funzionamento di un comune motore diesel puó essere schematizzato con il seguente ciclo termodinamico: una compressione adiabatica AB seguita da una trasformazione isobara BC in cui il sistema assorbe calore dalla combustione, una espansione adiabatica CD e una trasformazione isocora DA durante la quale il sistema cede calore all'esterno. Si supponga che tale ciclo venga eseguito con gas perfetto biatomico e che $V_A = 0.5\,\ell$, $p_A = 1\,\mathrm{atm}$, $T_A = 300\,\mathrm{K}$. Sia inoltre $V_B/V_A = 1/20$, $V_C/V_A = 1/12$ e $P_D = 2.045\,\mathrm{atm}$.
Nota: nel testo assegnato in aula la pressione P_D era erroneamente indicata come $P_D = 2.045\,\mathrm{atm}$. Essendo un dato ridondante e derivabile dagli altri dati del problema, la risposta numerica dipendeva da quali dati si utilizzavano.



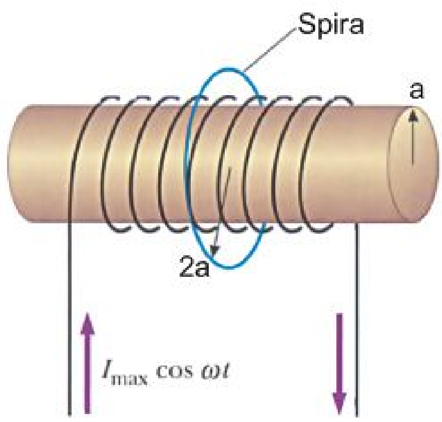
Quesito 3.1 Si calcoli il calore assorbito nel tratto BC.

Quesito 3.2 Si calcoli il rendimento del ciclo.

Quesito 3.3 Supponendo che il ciclo venga ripetuto 2000 volte al minuto si calcoli la potenza del motore.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:
Un lungo solenoide con densità di spire $n = 17.0$ spire/cm e raggio $a = 3.80$ cm è percorso da una corrente $I(t) = I_{\max}\cos\omega t$, con $I_{\max} = 4.90$ A e $\omega/2\pi = f = 0.820$ kHz. Attorno al solenoide, e coassiale con esso, è posta una spira di raggio $2a$ e resistenza $R = 7.40\,\Omega$.



Quesito 4.1 Determinare il massimo campo magnetico sull'asse del solenoide.

Quesito 4.2 Determinare la massima corrente che scorre nella spira.

Quesito 4.3 Determinare la potenza media P dissipata nella spira in un periodo di oscillazione $T = 1/f$. (Può essere utile ricordare l'dentità trigonometrica $\sin^2\phi = (1-\cos 2\phi)/2$)

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Poiché tutte le forze esterne agenti dal sistema costituito dal tubo e dal blocchetto sono verticali e non ci sono forze non conservative, durante la caduta del blocchetto si conservano sia l'energia meccanica che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema. Considerando come istante iniziale quello in cui il blocchetto comincia a cadere e come istante finale quello in cui esce dal tubo abbiamo quindi che:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= m_1 g h. \end{aligned} \tag{1, 2}$$

Ricavando la velocitàdel tubo dalla prima equazione $v_2 = -(m_1/m_2)v_1$e sostituendo nella seconda

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} v_1^2 = m_1 g h \tag{3}$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + m_1/m_2}} = \sqrt{\frac{5}{3} g h} = 3.62 \text{ m/s}. \tag{4}$$

Considerando l'asse delle x diretto verso destra, i segni saranno $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$

Quesito 1.2 La massima compressione della molla si ha in corrispondenza dell'istante in cui il blocchetto ha velocitá nulla; poiché, come nel caso precedente sul sistema molla+blocchetto non agiscono forze dissipative si ha che

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \tag{5}$$

da cui

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2}{k}} = 33\,\text{cm}. \tag{6}$$

Dal momento in cui il blocchetto colpisce la molla e la massima compressione il sistema compie un quarto di oscillazione, quindi

$$\Delta t = T/4 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.14 \text{ s}. \tag{7}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m_1}$ è la pulsazione delle oscillazioni della massa m_1

Quesito 1.3 La massa m_1 lascia la molla con la stessa velocit'a in modulo, ma segno opposto $v_1' = -v_1$. Poiché $|v_1'| > |v_2| = |v_1|/5$ la massa raggiungerà il tubo, che si muove piú lentamente. Per determinare quale altezza raggiungerà il blocchetto nel tubo possiamo ragionare in maniera analoga ed inversa a quanto fatto nel punto 1. Sfruttiamo quindi la conservazione della componente longitudinale della quantitá di moto e dell'energia meccanica considerando come istante iniziale quello in cui il blocchetto entra nel tubo e come istante finale quello in cui raggiunge la massima altezza.

$$\begin{aligned} m_1 v_1' + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v_f \\ \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + m_1 g h' \end{aligned} \tag{8, 9}$$

dalla prima si ha

$$v_f = \frac{-m_1 v_1 + m_2(-m_1/m_2) v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{3} v_1. \tag{10}$$

Si può osservare che il primo membro della seconda equazione è lo stesso della eq (1), per cui sostituendo si ha

$$m_1 g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + m_1 g h' \tag{11}$$

da cui

$$h' = h - \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 g} \frac{v_1^2}{9} = h - \frac{v_1^2}{3g} = \frac{4}{9} h = 35.5\,\text{cm}. \tag{12}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Scriviamo la prima e la seconda equazione cardinale per il cilindro. Prendendo un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale ed orientato verso destra e l'asse y verticale, ed orientando la rotazione positiva in senso antiorario, si ha, indicando per brevità con a l'accelerazione del centro di massa del cilindro,

$$\begin{aligned} Ma_x &= F\cos\theta + F_s \\ Ma_y &= N - Mg + F\sin\theta \\ I\alpha &= F_s R - FR/2, \end{aligned} \tag{13}$$

dove il momento delle forze è calcolato rispetto al centro di massa del cilindro. Possiamo ricavare F_s dalla prima equazione e, tenuto conto che $I = 1/2MR^2$ e che, poiché il cilindro rotola senza strisciare, $\alpha = -a_x/R$ nel sistema di riferimento scelto, sostituendo nella terza equazione si ottiene

$$-\frac{1}{2}Ma_x = Ma_x - F\cos\theta - \frac{F}{2} \tag{14}$$

ovvero

$$a_x = \frac{F}{3M}(2\cos\theta + 1) = \frac{g}{3}(2\cos\theta + 1) = \frac{g(\sqrt{2}+1)}{3} = 7.894\ \mathrm{m}/s^2. \tag{15}$$

Quesito 2.2 Sfruttando l'equazione ottenuta al punto precedente

$$Ma_x = F_s + F\cos\theta \tag{16}$$

e sostituendo per a_x si vede facilmente che

$$F_s = Ma_x - F\cos\theta = Mg\frac{2-\sqrt{2}}{6} = 4,79\ \mathrm{N} \tag{17}$$

positiva e dunque diretta nel verso del moto.

Quesito 2.3 Poiché $F_s \leq \mu_s R$ il minimo μ_s è quello per il quale vale l'uguaglianza, ovvero

$$\mu_{s,min} = \frac{F_s}{R} \tag{18}$$

R puó essere ricavato dalla seconda delle (13), imponendo la condizione di equilibrio per la componente verticale dell'accelerazione

$$0 = N - Mg + F\sin\theta \tag{19}$$

da cui

$$N = Mg(1-\sin\theta) = Mg\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tag{20}$$

e

$$\mu_{s,min} = \frac{Mg\frac{2-\sqrt{2}}{6}}{Mg\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} = 0.33. \tag{21}$$

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)

Problema 3:

Quesito 3.1 Trattandosi di una isobara si ha, per definizione,

$$Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) \tag{22}$$

dobbiamo quindi calcolare T_B e T_C; poiché AB è adiabatica si ha

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad\Longrightarrow\quad T_B = T_A(\frac{V_A}{V_B})^{\gamma-1} = 994.3\,\mathrm{K}, \tag{23}$$

cove si è utilizzato $\gamma = c_P/c_v = \frac{7/2}{5/2} = 7/5$ per un gas biatomico. BC d'altra parte é isobara, quindi

$$T_B/V_B = T_C/V_C \quad\Longrightarrow\quad T_C = T_B\frac{V_C}{V_A} = 1657\,\mathrm{K} \tag{24}$$

ricaviamo infine n usando l'equazione di stato nel punto A ottenendo, in termini delle quantitá note

$$Q_{BC} = \frac{P_A V_A T_B}{RT_A}c_P(\frac{V_C}{V_B} - 1) = 391.3\,\mathrm{J} \tag{25}$$

Quesito 3.2 Per definizione si ha

$$\eta = \frac{|\mathcal{L}|}{Q_{ass}} = \frac{Q_{TOT}}{Q_{ass}} \tag{26}$$

osservando poi che tutto il calore è assorbito nel tratto BC e ceduto nel tratto DA si ha

$$\eta = \frac{Q_{BC} - |Q_{DA}|}{Q_{BC}}. \tag{27}$$

Per calcolare Q_{DA} possiamo usare la relazione

$$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) \tag{28}$$

ovvero, osservando che $V_D = V_A$

$$Q_{DA} = \frac{P_A V_A}{R} c_V (1 - \frac{P_D}{P_A}) = -132.3 \text{ J} \tag{29}$$

da cui si ricava $\eta = 0.66$.

Quesito 3.3 Per definizione la potenza é il lavoro fornito nell'unitá di tempo, ovvero

$$P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \tag{30}$$

se il motore compie 2000 cicli al minuto significa che in un secondo fornisce una quantità lavoro pari a

$$\mathcal{L} = \frac{2000}{60} \mathcal{L}_{\text{ciclo}} \tag{31}$$

dove

$$\mathcal{L}_{\text{ciclo}} = Q_{AB} - |Q_{DA}| = 258.9\,\text{J} \tag{32}$$

quindi $P = 8.6\,\text{kW}$.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Quesito 4.1 Il campo magnetico generato da un solenoide lungo e sottile è approssimativamente uniforme all'interno del solenoide e nullo all'esterno. Il valore del campo sull'asse si puó ottenere dal teorema di Ampère, scegliendo un rettangolo con un lato sull'asse del solenoide ed un lato all'esterno del solenoide stesso. Si ottiene

$$B(t) = \mu_0 n I(t); \quad \text{e per il massimo} \quad B_{\max} = \mu_0 n I_{\max} = 1.05 \times 10^{-2}\,\text{T}$$

Quesito 4.2 La corrente indotta nella spira è data dalla legge di Faraday: $V^{\text{ind}} = -(d\Phi_B/dt)$ e quindi $I^{\text{ind}} = -(d\Phi_B/dt)/R$ dove il flusso del campo magnetico è dato da $\Phi_B = B(t) \cdot (\pi a^2)$ (si deve considerare solo l'area in cui è effettivamente presente il campo magnetico). Si ottiene:

$$I^{\text{ind}}(t) = \frac{\omega(\pi a^2) B_{\max} \sin(\omega t)}{R}; \quad \text{e per il massimo} \quad I^{\text{ind}}_{\max} = \frac{2\pi f (\pi a^2) B_{\max}}{R} = 33\,\text{mA}$$

Quesito 4.3 La potenza dissipata nella spira in funzione del tempo è data da $P(t) = V^2/R$, cioè:

$$P(t) = \frac{\omega^2 (\pi a^2)^2 B^2_{\max} \sin^2(\omega t)}{R} = P_0 \sin^2(\omega t), \quad \text{con} \quad P_0 = \frac{\omega^2 (\pi a^2)^2 B^2_{\max}}{R} = (I^{\text{ind}}_{\max})^2 R = 8.14\,\text{mW}.$$

Per ottenere la potenza media bisogna integrare su un periodo:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T P_0 \sin^2(\omega t) dt = P_0 \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{P_0}{2} = 4.07\,\text{mW}$$

in quanto l'integrale del $\cos(2\omega t)$ si annulla su un periodo.