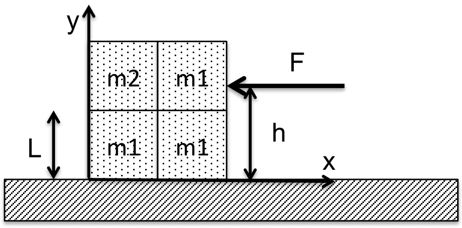
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 26/06/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente su fogli forniti
- Modalità di risposta: scrivere la formula parametrica della risposta nello spazio grande e la risposta numerica nello spazio piccolo. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Un trasportatore sovrappone quattro casse cubiche di lato identico $L = 40\,\mathrm{cm}$ come mostrato in figura. Tre casse hanno la stessa massa $m_1 = 8\,\mathrm{kg}$ mentre la quarta cassa ha massa $m_2 = 3m_1$. Le quattro casse sono solidali tra loro e possono essere considerate come un unico corpo rigido. Tra casse e pavimento c'è attrito.



Quesito 1.1 Determinare la posizione x e y del centro di massa del sistema rispetto allo spigolo in basso a sinistra.

Quesito 1.2 Il trasportatore applica sul sistema una forza orizzontale F ad un'altezza h. Si accorge che per far strisciare il sistema invece che ruotare bisogna che sia $h < 3L/2$. Determinare il coefficiente di attrito statico tra casse e pavimento μ_S.

Quesito 1.3 Successivamente il trasportatore applica invece un forza F inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale allo spigolo superiore destro del sistema (nel punto $(2L, 2L)$). Trovare il minimo angolo θ per cui il sistema striscia e non ruota.

Problema 2:

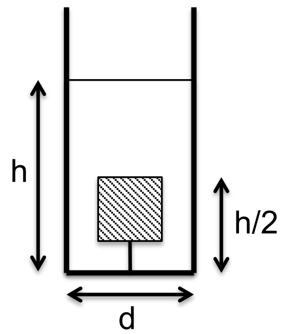
Un blocco di massa $M = 200\,\mathrm{g}$ è vincolato a muoversi, in assenza di gravità su un'astronave, su una guida circolare di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$. Al tempo $t = 0$ il blocco ha una velocità di modulo $V_0 = 4\,\mathrm{m/s}$. La guida, oltre alla reazione normale, esercita sul blocco una forza di attrito dinamico il cui coefficiente è $\mu_D = 0.1$. A causa dell'attrito la velocità diminuirà progressivamente. Si indichi con V il modulo della velocità, variabile, per $t > 0$.

Quesito 2.1 Trovare, in funzione di V, la reazione normale della guida e calcolarla numericamente quando $V = V_0/2$

Quesito 2.2 Trovare, in funzione di V, la forza di attrito e calcolarla numericamente quando $V = V_0/2$

Quesito 2.3 Determinare la velocità del blocco in funzione del tempo e calcolare dopo quanto tempo $V = V_0/2$

Problema 3:
Un cubetto di legno di lato $L = 3\,\mathrm{cm}$ e densità $\rho = 0.8\,\mathrm{g/cm^3}$ viene trattenuto sul fondo di un recipiente quadrato di lato $d = 2L$ per mezzo di un filo inestensibile di massa e sezione trascurabile. Il recipiente è parzialmente riempito di acqua di densità $\rho_a = 1.0\,\mathrm{g/cm^3}$ come mostrato schematicamente in figura. Il livello dell'acqua nel recipiente quando il cubetto è completamente immerso è $h = 3L$.

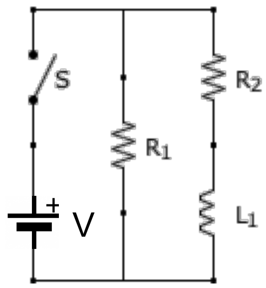


Quesito 3.1 Calcolare la tensione T del filo in condizioni di equilibrio.

Quesito 3.2 Al tempo $t = 0$ il filo viene tagliato. Trascurando la viscosità dell'acqua calcolare dopo quanto tempo il lato superiore del cubetto arriverà al pelo del liquido.

Quesito 3.3 Calcolare il livello h' del pelo del liquido quando il cubetto raggiunge la sua posizione di equilibrio di galleggiamento.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)



Problema 4:
Si consideri il circuito in figura, con i seguenti valori dei compononenti: $R_1 = 22.0\,\Omega$, $R_2 = 39.0\,\Omega$, $L_1 = 960\,\mu\mathrm{H}$, $V = 25.0\,\mathrm{V}$.

Quesito 4.1 L'interruttore S è inizialmente chiuso e mantenuto chiuso per un lungo tempo. Calcolare la corrente che scorre nell'induttanza L_1 in condizioni stazionarie.

Quesito 4.2 Ad un certo istante l'interruttore S viene aperto. Calcolare dopo quanto tempo la corrente nell'induttanza si è dimezzata.

Quesito 4.3 Sapendo che l'induttanza L_1 è realizzata con un solenoide di volume $D = 10\,\mathrm{cm}^3$, calcolare il campo di induzione magnetica generato all'interno del solenoide nelle condizioni stazionarie del quesito 7.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Tenuto conto del fatto che il centro di massa do ognuna delle casse si trova nel relativo centro geometrico possiamo calcolare la posizione del centro di massa del sistema separatamente per le due componenti x ed y; si ha quindi

$$x_{CM} = \frac{m_1 L/2 + 2m_1 3L/2 + m_2 L/2}{3m_1 + 3m_1} = \frac{5m_1 L}{6m_1} = \frac{5}{6}L = 33.3\,\mathrm{cm} \tag{1}$$

e

$$y_{CM} = \frac{2m_1 L/2 + m_2 3L/2 + m_1 3L/2}{6m_1} = \frac{7m_1 L}{6_m 1} = \frac{7}{6}L = 46.7\,\mathrm{cm}. \tag{2}$$

Quesito 1.2 Scriviamo la prima e la seconda equazione cardinale per il sistema prendendo come polo lo spigolo inferiore sinistro ed imponiamo la condizione limite per cui la cassa striscia senza ribaltarsi ($\alpha = 0$, $a_x = a_y = 0$, $F_s = F_{s,max}$ e la reazione del piano è applicato sullo spigolo sinistro), si ha allora

$$\begin{aligned} 6m_1 a_x &= -F + F_S = 0 \\ 6m_1 a_y &= N - 6m_1 g = 0 \\ I\alpha &= -6m_1 g 5L/6 + Fh = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

dalla terza si ottiene

$$F = 5m_1 gL/h \tag{4}$$

e dunque, sostituendo nella prima ed imponendo che F_S sia massima,

$$\mu_S = \frac{F}{6m_1 g} = \frac{5L}{6h} = \frac{5}{9} = 0.55. \tag{5}$$

Quesito 1.3 In questo caso le due equazioni cardinali con le stesse condizioni viste in precedenza ci dicono che

$$\begin{aligned} -F\cos\theta + F_S &= 0 \\ N - 6m_1 g - F\sin\theta &= 0 \\ -6m_1 g 5L/6 + 2LF(\cos\theta - \sin\theta) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} F\cos\theta &= F_S \\ N &= 6m_1 g + F\sin\theta \\ 5m_1 gL &= 2LF(\cos\theta - \sin\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

da cui, sostituendo l'espressione per N della seconda equazione nella prima

$$F(\cos\theta - \mu_S \sin\theta) = 6\mu_S m_1 g \tag{8}$$

e quella per F nella terza si ha

$$\frac{5}{12}(\cos\theta - \mu_S \sin\theta) = \mu_S(\cos\theta - \sin\theta) \tag{9}$$

da cui

$$\tan\theta = -\frac{1}{7\mu_S}(5 - 12\mu_S) = \frac{3}{7} \to \theta = 0.40\,\mathrm{rad} = 22.9°. \tag{10}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Si consideri un sistema di riferimento solidale al blocchetto con asse x parallelo alla guida ed asse y ortogonale alla stessa e diretto verso il centro. La prima equazione cardinale per il blocchetto, scomposta nelle due componenti x ed y ci dice che

$$\begin{aligned} Ma_x &= -F_D \\ Ma_y &= \frac{MV^2}{R} = N \end{aligned} \tag{11}$$

da cui $N = MV^2/R$; quando $V = V_0/2$ si ha che

$$N = \frac{MV_0^2}{4R} = 4\ \mathrm{N}. \tag{12}$$

Quesito 2.2 Poiché sappiamo inoltre che $F_D = \mu_D N$ si ricava facilmente che, quando $V = V_0/2$,

$$F_D = \mu_D \frac{MV_0^2}{4R} = 0.4 \text{ N}. \tag{13}$$

Quesito 2.3 Per calcolare la variazione della velocità al passare del tempo osserviamo che

$$\frac{dV(t)}{dt} = a = -\mu_D N \tag{14}$$

e quindi

$$\frac{dV(t)}{dt} = a = -\mu_D \frac{V^2(t)}{R}. \tag{15}$$

Questa equazione differenziale può essere integrata per parti

$$\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV'}{V'^2} = -\int_0^t \frac{\mu_D}{R} dt' \tag{16}$$

ottenendo

$$-\frac{1}{V(t)} + \frac{1}{V_0} = -\frac{\mu_D t}{R} \tag{17}$$

ovvero

$$V(t) = \frac{RV_0}{\mu_D V_0 t + R}. \tag{18}$$

Dalla 17 si può ricavare anche l'istante in cui la velocità si dimezza, ovvero

$$t = \frac{R}{\mu_D}\left(\frac{2}{V_0} - \frac{1}{V_0}\right) = 0.5\,\text{s}. \tag{19}$$

Solo per il corso di Fisica Generale I (270)

Problema 3:

Quesito 3.1 Prendendo l'asse y come verticale e rivolto verso l'alto, la prima equazione cardinale, all'equilibrio, ci dice che

$$Ma_y = \rho_a g L^3 - \rho g L^3 - T = 0 \tag{20}$$

da cui, tenuto conto che $\rho_a = 1000\,\text{kg/m}^3$,

$$T = gL^3(\rho_{H_20} - \rho) = 5.3 \cdot 10^{-2} \text{ N}. \tag{21}$$

Quesito 3.2 Se il filo viene tagliato l'equazione 20 diventa

$$Ma_y = \rho_a g L^3 - \rho g L^3 \tag{22}$$

ovvero

$$a_y = \frac{\rho_a}{\rho} g - g \tag{23}$$

da cui, usando l'equazione per il moto uniformemente accelerato $y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2$ con $y(t) = 3L/2$, si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{3L}{\frac{\rho_a}{\rho} g - g}} = 0,19 \text{ s}. \tag{24}$$

Quesito 3.3 Quando il cubetto emerge la sua equazione di equilibrio sarà

$$Ma_y = \rho_a g V - \rho g L^3 = 0 \tag{25}$$

dove V Ë il volume della porzione di cubo immersa, che vale

$$V = \frac{\rho L^3}{\rho_a}. \tag{26}$$

Tenuto conto del fatto che la porzione di recipiente occupata dal sistema acqua+cubo è data da

$$V_{tot} = d^2 h' = V_a + V \tag{27}$$

e ricavando il volume dell'acqua V_a dalla configurazione iniziale

$$V_a = d^2 h - L^3 \tag{28}$$

si trova che l'altezza dell'acqua dopo la rottura del filo è data da

$$h' = \frac{d^2 h - L^3 + V}{d^2} = h - \frac{L^3}{d^2}(1 - \frac{\rho}{\rho_a}) = 8.85\,\text{cm} \tag{29}$$

ovvero il livello dell'acqua si Ë abbassato di 1.5 mm.

Solo per il corso di Fisica Generale (509)

Problema 4:

Quesito 4.1 La serie di $R2$ e $L1$ è tenuta a potenziale costante V. Questo è un circuito RL per cui, nel caso di carica del circuito, vale:

$$I_{L1}(t) = \frac{V}{R2}\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \tau = \frac{L1}{R2} = 24.6\ \mu\text{s}$$

Valutando l'espressione per t grandi ($t \to \infty$):

$$i_{L1} = \frac{V}{R2} = 0.64\ \text{A}.$$

Si può anche osservare che in condizioni stazionarie l'induttanza può essere trattata come un cortocircuito, e che quindi la d.d.p ai capi di R2 è tutta la tensione della batteria.

Quesito 4.2 Quando il circuito viene aperto L1 si scarica sulla serie delle due resistenze:

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau'}} \qquad \tau' = \frac{L1}{R1 + R2} = 15.7\ \mu\text{s}$$

dove $i(0)$ è la corrente che circola nel circuito quando l'interruttore viene aperto, quindi la corrente trovata al punto precedente: $i(0) = i_{L1} = \frac{V}{R2} = 0.64$ A. Per trovare l'istante t a cui la corrente si dimezza:

$$i(0)e^{-\frac{t}{\tau'}} = i(0)/2 \quad \Rightarrow \quad t = -\tau' \ln(1/2) = 10.9\ \mu\text{s}.$$

Quesito 4.3 L'energia immagazzinata dal solenoide vale $E = \frac{1}{2}Li_{L1}^2$ e la densità di energia quando è presente solo il campo magnetico vale $u = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$, per cui:

$$E = D\ u \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{\mu_0 L}{D}}\,i_{L1} = 7\ 10^{-3}\ \text{T}.$$

Alternativamente si può osservare che l'induttanza di un solenoide vale $L = \mu_0 n^2 D$ da cui $n = \sqrt{L/(\mu_0 D)}$, dove n è la densità del numero di spire. Dall'espressione del campo magnetico nel solenoide $B = \mu_0 n I_{L1}$ si ottiene la soluzione.