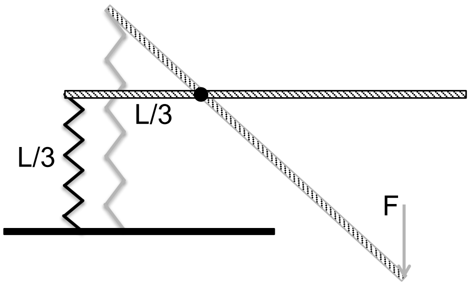
Fisica Generale 1 per Ing. Gestionale e Chimica (Prof. F. Forti)

A.A. 2011/12 Appello del 12/09/2012.

- Tempo a disposizione: 2h30. Scrivere solamente sui fogli forniti
- Modalità di risposta: spiegare sempre il procedimento seguito. Calcolare il valore numerico quando richiesto. Valore di ciascun quesito: 4 punti. Non ci sono penalità per le risposte errate. 3 punti di bonus per la chiarezza espositiva.
- Durante la prova scritta è consentito usare solo il formulario personale, strumenti di disegno e scrittura, calcolatrice: non è possibile utilizzare eserciziari o appunti. Il candidato dovrà restituire tutta la carta fornita dagli esaminatori: non è consentito utilizzare fogli di carta propri per svolgere l'elaborato.
- Si assumano i seguenti valori per le costanti che compaiono nei problemi: $g = 9.81\ ms^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s)}$ $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$.

Problema 1:
Una sbarretta sottile e uniforme di massa $M = 300\,\mathrm{g}$ e lunghezza $L = 45\,\mathrm{cm}$ è incernierata ad un perno orizzontale liscio posto ad $L/3$ dall'estremo sinistro. L'estremo sinistro è fissato ad una molla di lunghezza a riposo nulla il cui altro estremo è collegato ad un binario orizzontale che si trova ad una distanza $L/3$ sotto il perno di rotazione. Il collegamento della molla al binario puó scorrere senza attrito in modo che la molla rimanga sempre verticale. Inizialmente il sistema, che è soggetto alla gravità, è in equilibrio con la sbarretta orizzontale.



Quesito 1.1 Calcolare la costante elastica della molla.

Quesito 1.2 Successivamente viene applicata una forza F verticale all'estremo destro della sbarretta e nella nuova posizione di equilibrio la sbarretta forma un angolo di $\theta = \pi/4$ con l'orizzontale. Calcolare la forza F.

Quesito 1.3 La forza F viene rimossa istantaneamente e la sbarretta torna quindi verso l'originale posizione di equilibrio orizzontale. Calcolare la velocità angolare ω con cui passa da tale posizione.

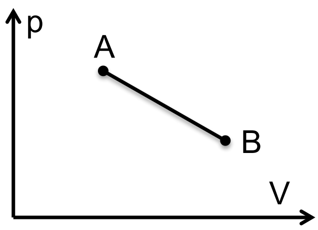
Problema 2:
Un ascensore di altezza $h = 2.70\,\mathrm{m}$ inizia a muoversi verso l'alto con una accelerazione costante $a = 1.5\,\mathrm{m/s^2}$, partendo da fermo. Dopo un tempo $t_0 = 2.0\,\mathrm{s}$ un bullone mal fissato si stacca dal soffitto dell'ascensore e cade sul pavimento.

Quesito 2.1 Calcolare il tempo di caduta del bullone.

Quesito 2.2 Calcolare lo spostamento totale del bullone nel sistema di riferimento dell'edificio dal momento in cui si stacca a quando tocca il pavimento.

Quesito 2.3 Considerando adesso t_0 come variabile, determinare per quale valore di t_0 il bullone tocca il pavimento dell'ascensore alla stessa altezza da terra a cui si era staccato dal soffitto.

Problema 3:
Un gas perfetto monoatomico si trova inizialmente nello stato A con $V_A = 2.5\,\mathrm{m^3}$ e $p_A = 1.5\,\mathrm{atm}$. Compie successivamente una trasformazione quasi statica fino al punto B con $V_B = 3V_A$ e $2p_B = p_A$ lungo il segmento di retta che unisce A a B nel piano pV.



Quesito 3.1 Calcolare il calore assorbito dal gas nella trasformazione.

Quesito 3.2 Esprimere la temperatura assoluta del gas $T(V)$ in funzione del volume V lungo la trasformazione, e calcolare il rapporto T/T_A nel punto medio del segmento AB.

Quesito 3.3 Trovare il volume V_{max} della trasformazione per cui la temperatura del gas è massima e calcolare in questo punto il rapporto T/T_A.

Soluzioni

Problema 1:

Quesito 1.1 Le forze in gioco sono la forza elastica applicata ad un estremo della sbarretta e la forza peso applicata al centro di massa, con $x_{CM} = (1/2 - 1/3)L$ rispetto alla cerniera. Considerando i momenti rispetto alla cerniera si ha

$$F_{el}\frac{L}{3} - P\frac{L}{6} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k\frac{L}{3}\frac{L}{3} = Mg\frac{L}{6} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{3}{2}\frac{Mg}{L} = 9.81\,\mathrm{N/m} \tag{1}$$

Quesito 1.2 Di nuovo si considerano i momenti rispetto alla cerniera. Detto θ l'angolo formato con l'orizzontale dalla sbarretta, se un forza verticale viene applicata lungo sbarretta ad una distanza d, il braccio della forza (che è la distanza dalla retta di azione della forza dal polo) è $d\cos\theta$. Considerando che la molla rimane sempre verticale, la sua lunghezza nella nuova posizione è $D = L/3 + L/3\sin\theta$. Si ottiene quindi:

$$kD\frac{L}{3}\cos\theta - Mg\frac{L}{6}\cos\theta - F\frac{2}{3}L\cos\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{1}{2}\left[k\frac{L}{3}(1+\sin\theta) - \frac{Mg}{2}\right] = \frac{Mg\sin\theta}{4} = 0.52\,\mathrm{N} \tag{2}$$

dove si è sostuito il valore per k trovato sopra.

Quesito 1.3 Nel moto della sbarretta si conserva l'energia meccanica totale, in quanto la forza di gravità e la forza elastica sono conservative e non c'è attrito. Considerando il riferimento del potenziale gravitazionale quando la sbarretta è orizzontale, si ottiene:

$$-Mg\frac{L}{6}\sin\theta + \frac{1}{2}k\left[\frac{L}{3}(1+\sin\theta)\right]^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{MgL\sin^2\theta}{12} \tag{3}$$

dove di nuovo si è sostituito il valore di k trovato nella (1). Il momento di inerzia rispetto al perno si trova con il teorema di Steiner:

$$I_O = I_{CM} + Mx_{CM}^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ML^2 \tag{4}$$

Sostituendo si ricava:

$$\omega^2 = \frac{2MgL\sin^2\theta}{12}\frac{9}{ML^2} = \frac{3g}{4L} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{4L}} = 4.04\,\mathrm{rad/s} \tag{5}$$

Problema 2:

Quesito 2.1 Il bullone cade con accelerazione g, mentre l'ascensore sale con accelerazione a. L'accelerazione relativa è $a_R = g + a$, per cui il tempo di caduta Δt è dato da

$$h = \frac{1}{2}a_R\Delta t^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a_R}} = 0.69\,\mathrm{s} \tag{6}$$

Da notare che il tempo di caduta è indipendente dal momento in cui si stacca il bullone.

Quesito 2.2 Nel sistema del'edificio al momento del distacco (che consideriamo come origine dei tempi) il bullone ha una velocità $v_0 = at_0 = 3.0\,\mathrm{m/s}$ diretta verso l'alto. Orientando l'asse delle y verso l'alto e considerando $y = 0$ al momento del distacco del bullone si ha che lo spostamento del bullone dopo un tempo Δt è:

$$\Delta y = v_0\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 = (v_0 - \frac{1}{2}g\Delta t)\Delta t = -0.27\,\mathrm{m} \tag{7}$$

cioè nel sistema dell'edificio il bullone tocca il pavimento circa 27 cm *sotto* il punto di distacco.

Quesito 2.3 Utilizzando la (7) con t_0 variabile ed imponendo $\Delta y = 0$ si ottiene

$$\Delta y = (at_0 - \frac{1}{2}g\Delta t)\Delta t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2}\frac{g}{a}\Delta t = 2.26\,\mathrm{s} \tag{8}$$

Problema 3:

Quesito 3.1 Utilizzando il primo principio della termodinamica e l'espressione dell'area del trapezio limitato dal segmento AB e l'asse orizzontale si ha:

$$Q = \Delta U - W = nc_V(T_B - T_A) + \frac{p_A + p_B}{2}(V_B - V_A) \tag{9}$$

Le temperature si possono esprimere attraverso l'equazione di stato dei gas perfetti: $T = pV/(nR)$. Inoltre considerando che per un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$ e le relazioni tra le pressioni e volumi dei punti A e B si ottiene

$$Q = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) + \frac{(3/2)p_A}{2}(2V_A) = \left(\frac{3}{2}(3/2 - 1) + \frac{3}{2}\right) p_A V_A = \frac{9}{4} p_A V_A = 8.55 \times 10^5\,\mathrm{J} \tag{10}$$

Quesito 3.2 Lungo il segmento AB la pressione in funzione del volume V è data da

$$\frac{p(V) - p_A}{V - V_A} = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A} \tag{11}$$

da cui si ottiene, sostituendo i valori di p_B e V_B:

$$p(V) = p_A - \frac{p_A}{4V_A}(V - V_A) = \frac{5}{4}p_A - \frac{p_A}{4V_A}V \tag{12}$$

La temperatura si ottiene dall'equazione di stato:

$$T(V) = \frac{pV}{nR} = \frac{1}{nR}\left(\frac{5}{4}p_A V - \frac{p_A}{4V_A}V^2\right) \tag{13}$$

Nel punto medio del segmento $V_M = (V_A + V_B)/2 = 2V_A$ che sostituito dà:

$$\frac{T(V_M)}{T_A} = \frac{\frac{5}{4}p_A(2V_A) - \frac{p_A}{4V_A}4V_A^2}{p_A V_A} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{14}$$

Quesito 3.3 La temperatura è massima quando la derivata $dT/dV = 0$. Derivando la (13) si ottiene

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{nR}\left(\frac{5}{4}p_A - \frac{p_A}{4V_A}2V\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{max} = \frac{5}{2}V_A = 6.25\,\mathrm{m}^3. \tag{15}$$

In corrispondenza di questo volume la temperatura vale:

$$\frac{T(V_{max})}{T_A} = \frac{\frac{5}{4}p_A(\frac{5}{2}V_A) - \frac{p_A}{4V_A}\frac{25}{4}V_A^2}{p_A V_A} = \frac{25}{16} = 1.56 \tag{16}$$

Solo per gli studenti vecchio ordinamento (509)

Esercizio 3- Due lastre *I* e *II* di area $A = 3\ \text{m}^2$ e spessore $d = 2$ mm si trovano fra le armature di un condensatore piano con armature di uguale area come mostrato schematicamente in figura. Le due piastre hanno conducibilità elettriche $\sigma_I = 2\ 10^{-3}\ (\Omega\ \text{m})^{-1}$ e $\sigma_{II} = \sigma_I/2 = 10^{-3}\ (\Omega\ \text{m})^{-1}$, mentre le armature del condensatore hanno resistività trascurabile. Fra le armature è applicata una d.d.p. $\Delta V = 4.5$ V.

3.1 – Si calcoli la potenza dissipata in condizioni di regime.

3.2 – Si calcolino i campi elettrici E_I e E_{II} presenti all'interno della piastra *I* e *II* a regime.

3.3 – Si trovi il valore (modulo e segno) della carica elettrica Q che si accumula sulla superficie di separazione fra le piastre in condizioni di regime.

Soluzione

3.1- Le piastre sono equivalenti a due resistori di resistenze

$$R_I = \frac{d}{\sigma_I A} = 0.333\ \Omega \qquad \text{e} \qquad R_{II} = \frac{d}{\sigma_{II} A} = \frac{2d}{\sigma_I A} = 0.667\ \Omega \tag{1}$$

posti in serie. Dunque, la resistenza totale è:

$$R = R_I + R_{II} = 1\ \Omega \tag{2}$$

e la potenza dissipata è:

$$P = i^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} = 20.3\ \text{W} \tag{3}$$

3.2 – In condizioni di regime, le correnti che attraversano le due piastre sono uguali e pari a

$i = \Delta V/R. = 4.5$ A

Ma

$$i_I = J_I A = \sigma_I E_I A = i \tag{4}$$

e

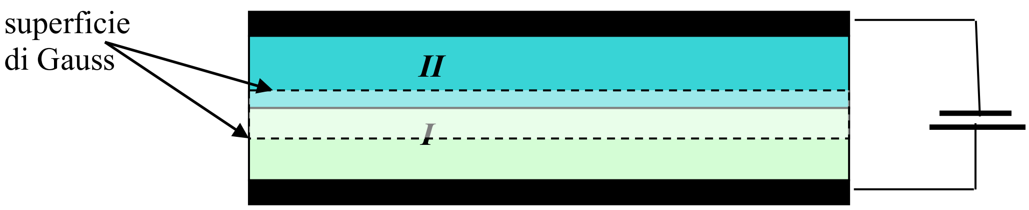
$$i_{II} = J_{II} A = \sigma_{II} E_{II} A = \frac{\sigma_I E_{II} A}{2} = i \tag{5}$$

Dunque, Si deduce:

$$E_I = \frac{i}{\sigma_I A} = 750\ \text{V/m} \qquad \text{e} \qquad E_{II} = \frac{2i}{\sigma_I A} = 2E_I = 1500\ \text{V/m} \tag{6}$$

Entrambi i campi sono diretti dalla piastra inferiore verso quella superiore.

3.3 - Per trovare la carica Q che si accumula sulla superficie di separazione basta applicare il teorema di Gauss ad un parallelepipedo che contenga all'interno la superficie di separazione e che abbia le basi di area A parallele alla superficie e disposte all'interno delle due lastre (superficie tratteggiata in figura). Per il Teorema di Gauss, tenendo conto del verso dei campi $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}$ e $\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}$, si trova:



$$\Phi = E_{II} A - E_I A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \varepsilon_0 A (E_{II} - E_I) = 1.99 \times 10^{-8}\ \text{C} = 19.9\ \text{nC}$$